0. Nech $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 3$ a $a_{n+3} = 4a_{n+2} + 11a_{n+1} - 30a_n$. Dokážte, že $30a_n = (-3)^n - 2^n + 5^n$.

Riešenie: Tvrdenie dokážeme úplnou matematickou indukciou. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky k, $1 \le k < n$ a dokážeme, že tvrdenie platí pre n.

Ak $n > 3$, môžeme predpokladať, že tvrdenie platí pre $n-1$, $n-2$ a $n-3$. Potom

$$\begin{aligned}
30a_n &= 120a_{n-1} + 330a_{n-2} - 900a_{n-3} = \\
&= 4((-3)^{n-1} - 2^{n-1} + 5^{n-1}) + 11((-3)^{n-2} - 2^{n-2} + 5^{n-2}) - 30((-3)^{n-3} - 2^{n-3} + 5^{n-3}) = \\
&= -4/3 \cdot (-3)^n - 2 \cdot 2^n + 4/5 \cdot 5^n + 11/9 \cdot (-3)^n - 11/4 \cdot 2^n + 11/25 \cdot 5^n + \\
&\quad +10/9 \cdot (-3)^n + 15/4 \cdot 2^n - 6/25 \cdot 5^n = \\
&= (-3)^n - 2^n + 5^n.
\end{aligned}$$

Ak $n \le 3$ dosadením ľahko overíme, že tvrdenie platí.

1. Zistite, či sú nasledujúce relácie reflexívne, tranzitívne a symetrické. Svoje tvrdenia dokážte. Ak je relácia relaciou ekvivalencie, nájdite triedy rozkladu podľa tejto relácie.

- R je relácia nad $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, taká, že $((a,b),(c,d)) \in R \leftrightarrow \sin(a) + \cos(d) = \sin(c) + \cos(b)$.

  Reflexívnosť: Potrebujeme dokázať $((a,b),(a,b)) \in R$ (pre všetky prirodzené čísla a a b). Toto je z definície R ekvivalentné $\sin(a) + \cos(b) = \sin(a) + \cos(b)$, čo platí (pre všetky prirodzené čísla a a b). Relácia je teda reflexívna.

  Symetrickosť: Chceme dokázať, že ak $((a,b),(c,d)) \in R$, tak aj $((c,d),(a,b)) \in R$ (pre všetky prirodzené čísla a, b, c, d). Toto je z definície R ekvivalentné

  $$\sin(a) + \cos(d) = \sin(c) + \cos(b) \to \sin(c) + \cos(b) = \sin(a) + \cos(d).$$

  Toto tvrdenie, platí (pre všetky prirodzené čísla a, b, c, d). Relácia teda je symetrická.

  Tranzitívnosť: Chceme dokázať, že ak $((a,b),(c,d)) \in R$ a $((c,d),(e,f) \in R$, tak potom aj $((a,b),(e,f)) \in R$. Priamy dôkaz implikácie. Predpokladajme, že $((a,b),(c,d)) \in R$ a $((c,d),(e,f) \in R$. potom

  $$\begin{aligned}
  \sin(a) + \cos(d) &= \sin(c) + \cos(b) \quad (1) \\
  \sin(c) + \cos(f) &= \sin(e) + \cos(d) \quad (2)
  \end{aligned}$$

  Z (1) a (2) sčítaním dostávame

  $$\begin{aligned}
  \sin(a) + \cos(d) + \sin(c) + \cos(f) &= \sin(c) + \cos(b) + \sin(e) + \cos(d) \\
  \sin(a) + \cos(f) &= \cos(b) + \sin(e).
  \end{aligned}$$

  A teda $((a,b),(e,f)) \in R$. Relácia R je teda tranzitívna aje aj reláciou ekvivalencie.

  Triedy rozkladu: Dvojica (a,b) je v rovnakej triede rozkladu ako všetky dvojice (c,d), pre ktoré platí

  $$\begin{aligned}
  \sin(a) + \cos(d) &= \sin(c) + \cos(b) \\
  \sin(a) - \cos(b) &= \sin(c) - \cos(d)
  \end{aligned}$$

  Takže triedy ekvivalencie tvoria dvojice (x,y) s rovnakou hodnotou $\sin(x) + \cos(y)$ ($\cos = -\cos$).

- R je relácia nad $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, taká, že $((a,b),(c,d)) \in R \leftrightarrow \exists z \in \mathbb{Z}\ a = zb \wedge c = zd$.

  Reflexívnosť: Potrebujeme dokázať $((a,b),(a,b)) \in R$ (pre všetky prirodzené čísla a a b). Toto je z definície R ekvivalentné $\exists z \in \mathbb{Z}\ a = zb \wedge a = zb$, čo je ekvivalentné $\exists z \in \mathbb{Z}\ a = zb$. Toto však neplatí, lebo ak napr. $a = 3$ a $b = 2$, potom $z = 1.5$, avšak z má byť celé číslo. Relácia teda nie je reflexívna a nie je ani reláciou ekvivalencie.

- R je relácia nad $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, taká, že $((a,b),(c,d)) \in R \leftrightarrow \exists y,z \in \mathbb{Z} - \{0\}\ ya = zb \wedge yc = zd$.

  Reflexívnosť: Potrebujeme dokázať $((a,b),(a,b)) \in R$ (pre všetky prirodzené čísla a a b). Toto je z definície R ekvivalentné $\exists y,z \in \mathbb{Z} - \{0\}\ ya = zb \wedge ya = zb$, čo je ekvivalentné $\exists y,z \in \mathbb{Z} - \{0\}\ ya = zb$. Toto však neplatí, lebo ak napr. $a = 0$ a $b = 1$, potom z musí byť 0, čo je v spore s tým, že $z \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Relácia teda nie je reflexívna a nie je ani reláciou ekvivalencie.

2. Nech P a Q sú relácie nad množinou $\mathbb{N}$. Rozhodnite, či relácia $P \circ Q \circ Q^{-1} \circ P^{-1}$ musí byť vždy

- reflexívna,

  Riešenie: Ak $P = Q = \emptyset$, tak $P \circ Q \circ Q^{-1} \circ P^{-1} = \emptyset$. Prázna relácia nad $\mathbb{N}$ nie je reflexívna.

- symetrická,

  Riešenie: Potrebujeme ukázať, že ak $(x,y) \in P \circ Q \circ Q^{-1} \circ P^{-1}$, potom $(y,x) \in P \circ Q \circ Q^{-1} \circ P^{-1}$. Použijeme priamy dôkaz implikácie. Nech $(x,y) \in P \circ Q \circ Q^{-1} \circ P^{-1}$. Potom existujú $a,b,c \in \mathbb{N}$ také, že $(x,a) \in P$, $(a,b) \in Q$, $(b,c) \in Q^{-1}$ a $(c,y) \in P^{-1}$. Z definície inverznej relácie dostávame $(a,x) \in P^{-1}$, $(b,a) \in Q^{-1}$, $(c,b) \in Q$ a $(y,c) \in P$. Preto $(y,x) \in P \circ Q \circ Q^{-1} \circ P^{-1}$. Relácia je teda vždy symetrická.

Svoje tvrdenie dokážte.