Príprava na druhú písomku.

1. Zistite, či sú nasledujúce relácie reflexívne, tranzitívne a symetrické. Svoje tvrdenia dokážte. Ak je relácia relaciou ekvivalencie, nájdite triedy rozkladu podľa tejto relácie.
   - R je relácia nad $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, taká, že $(a, b), (c, d) \in R \leftrightarrow ad = bc$
   - R je relácia nad $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, taká, že $(a, b), (c, d) \in R \leftrightarrow \exists z \in \mathbb{Z}\ a = zc \wedge b = zd$
   - R je relácia nad $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, taká, že $(a, b), (c, d) \in R \leftrightarrow \exists z \in \mathbb{Z}\ a = zb \wedge c = zd$
   - R je relácia nad $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, taká, že $(a, b), (c, d) \in R \leftrightarrow \exists z \in \mathbb{Q}\ a = zc \wedge b = zd$
   - R je relácia nad $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, taká, že $(a, b), (c, d) \in R \leftrightarrow \exists z \in \mathbb{Q}\ a = zb \wedge c = zd$
   - R je relácia nad $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, taká, že $(a, b), (c, d) \in R \leftrightarrow \exists z \in \mathbb{Z}\ a = zd + 1 \wedge c = zb + 1$
   - R je relácia nad $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, taká, že $(a, b), (c, d) \in R \leftrightarrow \exists z \in \mathbb{Q}\ a = zd + 1 \wedge b = zc + 1$
2. Nech P, Q, a R sú relácie nad množinou $\mathbb{N}$. Rozhodnite o platnosti nasledujúcich tvrdení. R^+ označuje tranzitívny uzáver a R^* označuje reflexívno-tranzitívny uzáver.
   - Ak P a Q sú symetrické relácie, tak aj $P \circ Q$ je symetrická relácia.
   - Ak P a Q sú tranzitívne relácie, tak aj $P \circ Q$ je tranzitívna relácia.
   - Ak P, Q a R sú symetrické relácie, tak aj $P \cap (Q \cup R)$ je symetrická relácia.
   - Ak P je symetrická relácia a Q je tranzitívna relácia, tak aj $P \cap Q$ je tranzitívna relácia.
   - Ak P a Q sú reflexívne a tranzivívne relácie, tak $P \circ Q \circ Q^{-1} \circ P^{-1}$ je symetrická relácia.
   - Ak P a Q sú symetrické relácie, tak aj $P \circ Q$ je symetrická relácia.
   - Ak P a Q sú symetrické relácie, tak $(P \cup Q)^+$ je relácia ekvivalencie.
   - Ak P a Q sú symetrické relácie, tak $P^* \cup Q^*$ je relácia ekvivalencie.
   - Ak P je tranzitívne relácie, tak $I \cup P \cup P^{-1}$ je relácia ekvivalencie.
3. Dokážte nasledujúce tvrdenia.
   - Ak $a_1 = 1$ a $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \cdots + a_1 + 1$, potom $a_n = 2^n$.
   - Ak $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, potom $a_n = 5/3 \cdot 2^{n-1} + 1/3 \cdot (-1)^n$.