1. *(2 body)* Znegujte: $\forall x\,[((A(x) \vee B(x)) \to (C(x) \wedge \exists y\; D(x,y)))]$.

Riešenie: $\exists x\,[((A(x) \vee B(x)) \wedge (\neg C(x) \vee \forall y\; \neg D(x,y)))]$.

2. *(4 body)* Zistite, či sú nasledujúce formuly vždy pravdivé. Svoje tvrdenie dokážte.

a. $(\exists x\; a(x) \wedge \exists x\; b(x)) \to \exists x\; (a(x) \wedge b(x))$

Riešenie: Formula nie je vždy pravdivá. Nech je $\{0,1\}$ univerzálna množina a nech $a(0)$ a $b(1)$ platí a $a(1)$ a $b(0)$ neplatí. Potom existuje x pre ktoré platí $a(x)$, a to $x = 0$, a taktiež existuje x pre ktoré platí $b(x)$, a to $x = 1$. Ľavá strana implikácie je preto pravdivá. Naopak, ani pre $x = 0$ ani pre $x = 1$ neplatí $a(x) \wedge b(x)$, preto je pravá strana implikácie nepravdivá. Celá formula je teda v tomto prípade nepravdivá a preto nie je pravda, že je vždy pravdivá.

b. $(\exists x\; a(x) \vee \exists x\; b(x)) \to \exists x\; (a(x) \vee b(x))$

Riešenie: Formula je vždy pravdivá. Dokážeme to priamym dôkazom implikácie. Predpokladajme, že $\exists x\; a(x) \vee \exists x\; b(x)$. Rozdeľme si dôkaz na dve časti podľa toho, ktorá z dvoch alternatív v $\exists x\; a(x) \vee \exists x\; b(x)$ nastane.

Predpokladajme, že $\exists x\; a(x)$. Nazvime si takéto x ako s, to znamená, že platí $a(s)$. Potom platí aj $a(s) \vee b(s)$, a teda $\exists x\; (a(x) \vee b(x))$ (a to $x = s$).

Predpokladajme, že $\exists x\; b(x)$. Nazvime si takéto x ako t, to znamená, že platí $b(t)$. Potom platí aj $a(t) \vee b(t)$, a teda $\exists x\; (a(x) \vee b(x))$ (a to $x = t$).

Keďže v každej z alternatív sme dokázali, že platí $\exists x\; (a(x) \vee b(x))$, dokázali sme, že $\exists x\; (a(x) \vee b(x))$.

3. *(3 body)* Dokážte, že pre ľubovoľné množiny A, B, C platí, ak $A \cap C = B \cap C$, potom $C - A \subseteq C - B$.

Riešenie: Prepíšme si dokazované tvrdenie pomocou definícií $=$, $\cap$, $\cup$, $-$ a $\subseteq$. Dostávame

$$\forall x\,[(x \in A \wedge x \in C) \leftrightarrow (x \in B \wedge x \in C)] \to \forall x\,[(x \in C \wedge \neg x \in A) \to (x \in C \wedge \neg x \in B)]\,.$$

Tvrdenie dokážeme sporom. Tvrdenie znegujeme.

$$\forall x\,[(x \in A \wedge x \in C) \leftrightarrow (x \in B \wedge x \in C)] \wedge \exists x\,[x \in C \wedge \neg x \in A \wedge (\neg x \in C \vee x \in B)]\,.$$

Vieme teda, že platí

$$\forall x\,[(x \in A \wedge x \in C) \leftrightarrow (x \in B \wedge x \in C)] \tag{1}$$
$$\exists x\,[x \in C \wedge \neg x \in A \wedge (\neg x \in C \vee x \in B)]\,. \tag{2}$$

Keďže $\exists x\,[x \in C \wedge \neg x \in A \wedge (\neg x \in C \vee x \in B)]$, nazvime si toto x ako s. Vieme teda, že platí

$$s \in C \tag{3}$$
$$\neg s \in A \tag{4}$$
$$\neg s \in C \vee s \in B. \tag{5}$$

Rozdeľme si dôkaz podľa toho, ktorá z alternatív v (5) platí.

Predpokladajme, že $\neg s \in C$. Dostávame spor s (3).

Predpokladajme, že $s \in B$. Podľa (3)

$$s \in B \wedge s \in C. \tag{6}$$

Keďže podľa (1) $\forall x\,[(x \in A \wedge x \in C) \leftrightarrow (x \in B \wedge x \in C)]$, platí to aj pre s, a preto $(s \in A \wedge s \in C) \leftrightarrow (s \in B \wedge s \in C)$. Preto platí aj $(s \in B \wedge s \in C) \rightarrow (s \in A \wedge s \in C)$. Toto spolu s (6) dáva $s \in A \wedge s \in C$, a teda $s \in A$, čo je v spore s (4).

Keďže sme v obidvoch alternatívach dospeli ku sporu, sporné je aj celé pôvodné tvrdenie.

4. *(3 body)* Dokážte, že pre všetky $n > 0$

$$3^n < n^n + 6.$$

.

Riešenie: Priamy dôkaz. Platí $n = 1 \vee n = 2 \vee n \geq 3$. Rozdeľme si dôkaz podľa toho, ktorá z alternatív platí.

Predpokladajme, že $n = 1$. Potom $3^n = 3 < 7 = n^n + 6$.

Predpokladajme, že $n = 2$. Potom $3^n = 9 < 10 = n^n + 6$.

Predpokladajme, že $n \geq 3$. Umocíme ľavú aj pravú stranu v $n \geq 3$ na n-tú (keďže n je kladné, funkcia $f(y) = y^n$, t. j. umocnenie na n-tú, je rastúca; preto aplikovanie tejto funkcie zachováva nerovnosť). Dostávame $n^n \geq 3^n$. Preto

$$3^n \leq n^n < n^n + 6$$

.

Keďže sme tvrdenie dokázali vo všetkých troch alternatívach, preto tvrdenie platí.