1. *(4 body)* Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$\sum_{i=0}^{n}(i-1)i(i+1) \leq 4^n.$$

Riešenie: Platí že $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ alebo $n \geq 6$.

Ak $n = 0$, potom $(-1).0.1 = 0 \leq 1 = 4^0$.

Ak $n = 1$, potom $(-1).0.1 + 0.1.2 = 0 \leq 4 = 4^1$.

Ak $n = 2$, potom $(-1).0.1 + 0.1.2 + 1.2.3 = 6 \leq 16 = 4^2$.

Ak $n = 3$, potom $(-1).0.1 + 0.1.2 + 1.2.3 + 2.3.4 = 30 \leq 64 = 4^3$.

Ak $n \geq 4$, potom

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}(i-1)i(i+1) &= \sum_{i=1}^{n}(i-1)i(i+1) \leq \sum_{i=1}^{n}(n-1)n(n+1) \\ &= n(n-1)n(n+1) = n^2(n-1)(n+1) = n^2(n^2-1) < n^4.\end{aligned} \tag{1}$$

Dokážeme matematickou indukciou, že pre $n \geq 4$ platí $n^4 \leq 4^n$. Báza indukcie: Pre $n = 4$: $4^4 \leq 4^4$. Indukčný krok: Nech $n \geq 4$ a predpokladajme, že $n^4 \leq 4^n$. Potrebujeme dokázať, že

$$\begin{array}{rcl}(n+1)^4 & \leq & 4^{n+1} \\ (n+1)^4 & \leq & 4.4^n \\ (n+1)^4 & \leq & 4.n^4 \\ n+1 & \leq & \sqrt{2}.n \\ 1 & \leq & \sqrt{2}.n - n \\ 1 & \leq & (\sqrt{2}-1).n \\ \sqrt{2}+1 & \leq & n\end{array}$$

čo platí pre $n \geq 3$. Preto pre $n \geq 4$ platí $n^4 \leq 4^n$.

Preto podľa (1) $\sum_{i=0}^{n}(i-1)i(i+1) < n^4 \leq 4^n$.

2. *(4 body)* Nech $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a) Nájdite najmenšiu reláciu ekvivalencie na M, ktorá obsahuje reláciu $\{(1, 2), (4, 5), (6, 1)\}$. Nájdite rozklad množiny M na triedy prislúchajúci nájdenej relácii ekvivalencie.

Riešenie: Do relácie pridávame iba dvojice, ktoré tam musia byť: pridáme $(1, 1), (2, 2), (3, 3)$, $(4, 4), (5, 5), (6, 6)$, aby bola relácia reflexívna; pridáme $(2, 1), (5, 4), (1, 6)$, aby bola relácia symetrická, pridáme $(2, 6), (6, 2)$, aby bola relácia tranzitívna. Priamym overením reflexívnosti, tranzitívnosti a symetrickosti možno zistiť, že vytvorená relácia $\{(1, 2), (4, 5), (6, 1), (1, 1), (2, 2),$ $(3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (2, 1), (5, 4), (1, 6), (2, 6), (6, 2)\}$ je reláciou ekvivalencie.

b) Nech $\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6\}\}$ je rozklad množiny M. Nájdite reláciu ekvivalencie zodpovedajúcu tomuto rozkladu na triedy. Nájdite čo najmenšiu reláciu, ktorej relexívno-tranzitívny uzáver je najdená relácia ekvivalencie.

Riešenie: Zodpovedajúca relácia ekvivalencie je $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)(4,5),(5,4)\}$. Túto reláciu môžeme dostať ako reflexívno-tranzitívny uzáver relácie $\{(1,2),(2,3),(3,1),(4,5),(5,4)\}$.

3. *(4 body)* Nech $\mathcal{X}$ je množina všetkých symetrických relácií na množine $M = \{1,2,3,4,5,6\}$. Zistite, či sú nasledujúce relácie reláciami (ostrého) čiastočného usporiadania. Ak sú, nájdite najmenšie, najväčie, minimálne a maximálne prvky.

a) R je relácia na $\mathcal{X}$ definovaná nasledovne. Nech $A, B \in \mathcal{X}$. Potom $(A,B) \in R$ práve vtedy, keď $A \cup B$ je tranzívna relácia.

   Riešenie: Relácia R nie je asymetrická. Napríklad $\emptyset \in \mathcal{X}$ ($\emptyset$ je symetrická relácia na M). Avšak $(\emptyset,\emptyset) \in R$, pretože $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ je tranzitívna relácia.

b) R je relácia na $\mathcal{X}$ definovaná nasledovne. Nech $A, B \in \mathcal{X}$. Potom $(A,B) \in R$ práve vtedy, keď $|A| < |B| - 1$.

Riešenie: Relácia R je reláciou (ostrého) čiastočného usporiadania:

Nech $(A,B) \in R$. Potom $|A| < |B| - 1$, a teda $|A| \leq |B| - 1$, teda $|B| \geq |A| + 1$. Potom ale $|B| \geq |A| - 1$ a $(B,A) \notin R$. Preto je R asymetrická.

Nech $(A,B) \in R$ a $(B,C) \in R$. Potom $|A| < |B| - 1$ a $|B| < |C| - 1$. Teda $|A| < |C| - 2$. Preto aj $|A| < |C| - 1$ a $(A,C) \in R$. Relácia R je teda tranzitívna.

Relácia R nemá najmenšie ani najväčšie prvky. Minimálnymi prvkami sú $\emptyset$, $\{(1,1)\}$, $\{(2,2)\}$, $\{(3,3)\}$, $\{(4,4)\}$, $\{(5,5)\}$, $\{(6,6)\}$. Maximálnymi prvkami sú M^2, $M^2 - \{(1,1)\}$, $M^2 - \{(2,2)\}$, $M^2 - \{(3,3)\}$, $M^2 - \{(4,4)\}$, $M^2 - \{(5,5)\}$, $M^2 - \{(6,6)\}$.