1. *(2 body)* Znegujte: $\forall x\ ((A(x) \vee B(x)) \to (C(x) \wedge \exists y\ D(x,y)))$.

*R*iešenie: $\neg\forall x\ ((A(x)\vee B(x)) \to (C(x)\wedge\exists y\ D(x,y))) \Leftrightarrow \exists x\ ((A(x)\vee B(x))\wedge\neg(C(x)\wedge\exists y\ D(x,y))) \Leftrightarrow \exists x\ ((A(x) \vee B(x)) \wedge (\neg C(x) \vee \neg\exists y\ D(x,y))) \Leftrightarrow \exists x\ ((A(x) \vee B(x)) \wedge (\neg C(x) \vee \forall y\ \neg D(x,y)))$.

2. *(2 body)* Vyjadrite formulu $(A \vee B) \leftrightarrow C$ iba pomocou logickych spojek $\wedge$ a $\neg$.

*R*iešenie 1: $(A\vee B) \leftrightarrow C \Leftrightarrow [(A\vee B)\wedge C]\vee[\neg(A\vee B)\wedge\neg C] \Leftrightarrow [\neg\neg(A\vee B)\wedge C]\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C) \Leftrightarrow \neg\neg\{[\neg(\neg A \wedge \neg B) \wedge C] \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)\} \Leftrightarrow \neg\{\neg[\neg(\neg A \wedge \neg B) \wedge C] \wedge \neg(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)\}$.

*R*iešenie 2: $(A\vee B) \leftrightarrow C \Leftrightarrow [(A\vee B)\vee\neg C]\wedge[\neg(A\vee B)\vee C] \Leftrightarrow \neg\neg[(A\vee B)\vee\neg C]\wedge\neg\neg[\neg(A\vee B)\vee C] \Leftrightarrow \neg[\neg(A \vee B) \wedge C] \wedge \neg[(A \vee B) \wedge \neg C] \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B \wedge C) \wedge \neg[\neg\neg(A \vee B) \wedge \neg C] \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B \wedge C) \wedge \neg[\neg(\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg C]$.

3. *(2 body)* Dokážte nasledujúce tvrdenie:

$$[(A \to B) \wedge (\neg B \vee C)] \to [((C \to D) \wedge A) \to D].$$

*R*iešenie: Tvrdenie je implikáciou. Môžeme teda predpokladať, že

$$A \to B \tag{1}$$
$$\neg B \vee C \tag{2}$$

a chceme dokázať $((C \to D)\wedge A) \to D$. Dokazované tvrdenie má opäť tvar implikácie, preto môžeme predpokladať

$$C \to D \tag{3}$$
$$A \tag{4}$$

a chceme dokázať D. Z (4) a (1) dostávame pravidlom modus ponens

$$B \tag{5}$$

Rozdelíme dôkaz na dve časti podľa toho, ktorá časť (2) platí.

Ak platí $\neg B$, spolu s (5) dostávame False a z False vyplýva D.

Ak platí C, použitím pravidla modus ponens s (3) dostávame D.

Keďže sme v oboch prípadoch dokázali D, D platí, čo bolo treba dokázať.

4. *(2 body)* Nech $U = \{1, 2, 3\}$ je univerzálna množina. Definujeme výrokové formy $a(x)$, $b(x, y)$ a $c(x)$ nasledovne:

x	1	2	3
a(x)	true	false	false

x	1	2	3
c(x)	false	true	true

x	1	1	1	2	2	2	3	3	3
y	1	2	3	1	2	3	1	2	3
b(x,y)	true	false	true	true	false	true	false	true	false

Zistite, či sú nasledujúce výroky pri danej interpretácii pravdivé:

a. $\forall x\ [a(x) \vee \exists y\ (b(x,y) \wedge c(y))]$

*R*iešenie: Výrok je v danej interpretácii pravdivý.

Ak $x = 1$, potom platí $a(x)$ a teda aj $a(x) \vee \exists y\ (b(x,y) \wedge c(y))$.

Ak $x = 2$, potom pre $y = 3$ platí $b(x,y) \wedge c(y)$ a teda aj $a(x) \vee \exists y\ (b(x,y) \wedge c(y))$.

Ak $x = 3$, potom pre $y = 2$ platí $b(x,y) \wedge c(y)$ a teda aj $a(x) \vee \exists y\ (b(x,y) \wedge c(y))$.

Preto platí aj $\forall x\ [a(x) \vee \exists y\ (b(x,y) \wedge c(y))]$

b. $\exists y\ \forall x\ [a(x) \vee (b(x,y) \wedge c(y))]$

*R*iešenie: Výrok je v danej interpretácii nepravdivý.

Ak $y = 1$, potom pre $x = 2$ $a(x) \vee (b(x,y) \wedge c(y))$ neplatí a teda ani $\forall x\ [a(x) \vee (b(x,y) \wedge c(y))]$ neplatí.

Ak $y = 2$, potom pre $x = 2$ $a(x) \vee (b(x,y) \wedge c(y))$ neplatí a teda ani $\forall x\ [a(x) \vee (b(x,y) \wedge c(y))]$ neplatí.

Ak $y = 3$, potom pre $x = 3$ $a(x) \vee (b(x,y) \wedge c(y))$ neplatí a teda ani $\forall x\ [a(x) \vee (b(x,y) \wedge c(y))]$ neplatí.

Preto neplatí ani $\exists y\ \forall x\ [a(x) \vee (b(x,y) \wedge c(y))]$.

5. *(4 body)* Zistite, či sú nasledujúce formuly vždy pravdivé. Svoje tvrdenie dokážte.

a. $[\forall x\ (a(x) \vee \exists y\ b(x,y))] \rightarrow [\exists x\ (a(x) \wedge \exists y\ b(x,y))]$

*R*iešenie: Formula nie je vždy pravdivá. Zvoľme napríklad $U = \{0\}$, $a(x) \Leftrightarrow$ True a $b(x,y) \Leftrightarrow$ False.

b. $[\exists x\ (a(x) \wedge \exists y\ b(x,y))] \rightarrow [\exists x\ (a(x) \vee \forall y\ b(x,y))]$

*R*iešenie: Formula je vždy pravdivá. Dokážeme to priamym dôkazom implikácie. Môžeme predpokladať

$$\exists x\ (a(x) \wedge \exists y\ b(x,y)) \tag{6}$$

a chceme dokázať $\exists x\ (a(x) \vee \forall y\ b(x,y))$. Dosadením novej premennej s za x dostávame z (6)

$$a(s) \tag{7}$$
$$\exists y\ b(x,y) \tag{8}$$

Zo (7) dostávame

$$a(s) \vee \forall y\ b(s,y) \tag{9}$$

z čoho dostávame $\exists x\ (a(x) \wedge \exists y\ b(x,y))$, čo bolo treba dokázať.

6. *(3 body)* Dokážte, že pre všetky $n > 0$

$$3^n < n! + 200.$$

.

*R*iešenie 1: Overíme platnosť tvrdenia pre $n < 8$. Pre $n \geq 8$ dokážeme pomocou matematickej indukcie silnejšie tvrdenie $3^n < n!$.

Báza indukcie $n = 8$: $8! > 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 3 > 3^8$.

Indukčný krok: Predpokladajme $3^n < n!$. Chceme pre $n \geq 8$ doázať, že $3^{n+1} < (n+1)!$.

Podľa IP, $3^n < n!$. Keďže $3 < n+1$, dostávame násobením nerovníc (v kladných číslach) $3^{n+1} < (n+1)!$, čo bolo treba dokázať.

Teraz jednoducho dokážeme pôvodné tvrdenie pre $n \geq 8$: $3^n < n! < n! + 200$.

*R*iešenie 2: Báza indukcie: overíme, že tvrdenie platí pre $n \leq 6$.

Indukčný krok: Predpokladajme, že $3^n < n! + 200$. Chceme pre $n \geq 6$ dokázať, že

$$3^{n+1} < (n+1)! + 200$$

a teda

$$3^{n+1} < (n+1) \cdot n! + 200$$

Použitím IP nám stačí dokázať, že

$$\begin{aligned}
3^{n+1} &< (n+1)(3^n - 200) + 200 \\
3^{n+1} &< (n+1)3^n - 200n \\
3^{n+1} + 200n &< (n+1)3^n \\
3 + \frac{200n}{3^n} &< n+1 \\
\frac{200}{3^n}n &< n-2
\end{aligned}$$

Pre $n \geq 6$ je $\frac{200}{3^n} < 0.5$, preto stačí dokázať, že

$$\begin{aligned}
0.5 \cdot n &< n-2 \\
2 &< 0.5 \cdot n \\
4 &< n,
\end{aligned}$$

čo platí.