1. *(3 body)* Dokážte že pre každé tri množiny A, B, C

$$(A \cap C) \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (C \times C).$$

Riešenie: Všimnime si, že množiny na obidvoch stranách rovnosti obsahujú iba usporiadané dvojice. Preto dokazovanú rovnosť môžeme prepísať ako

$$\forall x, y \ (x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (C \times C).$$

Teda chceme dokázať

$$\begin{aligned}
(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap C) \quad &\Leftrightarrow \quad (x, y) \in (A \times B) \cap (C \times C), \\
x \in A \cap C \wedge y \in B \cap C \quad &\Leftrightarrow \quad (x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \in C \times C, \\
x \in A \wedge x \in C \wedge y \in B \wedge y \in C \quad &\Leftrightarrow \quad x \in A \wedge y \in B \wedge x \in C \wedge y \in C,
\end{aligned}$$

čo je tautológia.

2. *(3 body)* Nech A, B a C sú relácie na množine M. Dokážte, že

$$(A \circ B) \cup (A \circ C) \subseteq (A \cap M^2) \circ (B \cup C).$$

Riešenie: Všimnime si, že množiny na obidvoch stranách rovnosti obsahujú iba usporiadané dvojice. Chceme dokázať, že

$$\begin{aligned}
\forall x, y \in M \ (x, y) \in (A \circ B) \cup (A \circ C) \quad &\Rightarrow \quad (x, y) \in (A \cap M^2) \circ (B \cup C) \\
(x, y) \in (A \circ B) \cup (A \circ C) \quad &\Rightarrow \quad (x, y) \in (A \cap M^2) \circ (B \cup C) \\
(x, y) \in A \circ B \vee (x, y) \in A \circ C \quad &\Rightarrow \quad \exists z \in M \ (z, y) \in A \cap M^2 \wedge (x, z) \in B \cup C
\end{aligned}$$

Toto tvrdenie dokážeme priamym dôkazom implikácie. Môžeme teda predpokladať, že

$$(x, y) \in A \circ B \vee (x, y) \in A \circ C.$$

Predpoklad má formu disjunkcie, preto si dôkaz rozdelíme podľa toho, ktorá alternatíva nastáva

Ak $(x, y) \in A \circ B$, potom pre nejaké $z \in M$ platí

$$(z, y) \in A \wedge (x, z) \in B.$$

Potom ale aj

$$(z, y) \in A \wedge (x, z) \in B \cup C.$$

Keďže $z, y \in M$

$$(z, y) \in A \cap M^2 \wedge (x, z) \in B \cup C,$$

a teda

$$\exists z \in M \ (z, y) \in A \cap M^2 \wedge (x, z) \in B \cup C,$$

čo bolo treba dokázať.

Ak $(x, y) \in A \circ C$, potom pre nejaké $z \in M$ platí

$$(z, y) \in A \wedge (x, z) \in C.$$

Potom ale aj

$$(z, y) \in A \wedge (x, z) \in B \cup C.$$

Keďže $z, y \in M$

$$(z, y) \in A \cap M^2 \wedge (x, z) \in B \cup C,$$

a teda

$$\exists z \in M \ (z, y) \in A \cap M^2 \wedge (x, z) \in B \cup C,$$

čo bolo treba dokázať.

3. *(2 body)* Definujte reláciu R na množine $\mathbb{N}^2 \times (\mathbb{R} - \mathbb{Z})$, ktorá nie je tranzitívna.

Riešenie: $\{(((1,1), 0.5), ((1,1), 1.5)), (((1,1), 1.5), ((1,1), 2.5))\}$.

Riešenie: Stačí napr. vybrať tri rôzne prvky $x, y, z \in \mathbb{N}^2 \times (\mathbb{R} - \mathbb{Z})$ a do definovať $R = \{(x, y), (y, z)\}$. Relácia nie je tranzitívna, lebo $(x, y) \in R$, $(y, z) \in R$, ale $(x, z) \notin R$.

4. *(2 body)* Nech P je relácia na množine $\{1, 2, 3, 4\}$,

$$P = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (3,4), (4,4), (4,1)\}.$$

Rozhodnite, či je relácia P reflexívna, či je symetrická, a či je tranzitívna. Nájdite P^+.

Reflexívna: Áno Symetrická: Nie Tranzitívna: Nie

$$P^+ = \{(x, y) \mid x, y \in \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

Riešenie: Stačí priamočiaro použiť definície.

5. *(1 bod)* Nech R je relácia na množine $\mathbb{Z}$, $(x, y) \in R \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Q} \ kx = y + 5k$. Rozhodnite, či je relácia R reflexívna, či je symetrická, a či je tranzitívna.

Reflexívna: Nie Symetrická: Nie Tranzitívna: Nie

Riešenie: Platí $(x, y) \in R \Leftrightarrow x \neq 5 \vee y = 0$. Reflexívnosť: $(5, 5) \notin R$. Symetrickosť: $(1, 5) \in R$, ale $(5, 1) \notin R$. Tranzitívnosť: $(5, 0), (0, 1) \in R$, ale $(5, 1) \notin R$.

6. *(1 bod)* Nech S je relácia na množine $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, $(X, Y) \in S \Leftrightarrow X \cup Y \neq \emptyset$. Rozhodnite, či je relácia S reflexívna, či je symetrická, a či je tranzitívna.

Reflexívna: Nie Symetrická: Áno Tranzitívna: Nie

Riešenie: Reflexívnosť: $(\emptyset, \emptyset) \notin S$. Symetrickosť: z komutativity $\cup$. Tranzitívnosť: $(\emptyset, \{1\}), (\{1\}, \emptyset) \in S$, ale $(\emptyset, \emptyset) \notin S$.

7. *(3 body)* Nech $\leq_T$ je relácia na množine $\mathbb{Q}$ pričom $a \leq_T b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^+ \ a^k = b$.

a) Dokážte, že táto relácia je reláciou usporiadania a že toto usporiadanie nie je úplné.

b) Rozhodnite o prvkoch z množiny $\{-8, -4, -1, 0, 1, 2, 4\}$ (relácia je stále nad $\mathbb{Q}$!), či sú minimálne, najmenšie, maximálne alebo najväčšie v usporiadaní $<_T$.

Prvok	Minimálny	Maximálny	Najmenší	Najväčší
-8	N	N	N	N
-4	A	N	N	N
-1	A	N	N	N
0	A	A	N	N
1	N	A	N	N
2	A	N	N	N
4	N	N	N	N

Riešenie: Reflexívnosť: Potrebujeme dokázať, že $\forall a \in \mathbb{Q}\ \exists k \in \mathbb{N}^+\ a^k = a$. Teda $\exists k \in \mathbb{N}^+\ a^k = a$. Takéto k existuje, a to $k = 1$.

Antisymetrickosť: Potrebujeme dokázať, že $\exists k \in \mathbb{N}^+\ a^k = b \wedge \exists k \in \mathbb{N}^+\ b^k = a \Rightarrow a = b$. Priamy dôkaz implikácie. Označme si k pre ktoré $a^k = b$ ako k_1. Označme si k pre ktoré $b^k = a$ ako k_2. Máme $a^{k_1} = b$ a $b^{k_2} = a$. Potom ale $a^{k_1 k_2} = b^{k_2} = a$. Preto buď $a \in \{-1, 0, 1\}$, alebo $k_1 k_2 = 1$. Rozdeľme si dôkaz na štyri časti. Ak $a = -1$, tak potom aj $b = -1$, inak by nemohlo platiť $b^k = a$. To znamená $a = b$. Ak $a = 0$, tak potom aj $b = 0^{k_1} = 0$. To znamená $a = b$. Ak $a = 1$, tak potom aj $b = 1^{k_1} = 1$. To znamená $a = b$. Ak $k_1 k_2 = 1$, potom $k_1 = k_2 = 1$, a teda $a = a_1^k = b$.

Tranzitívnosť: Potrebujeme dokázať, že $\exists k \in \mathbb{N}^+\ a^k = b \wedge \exists k \in \mathbb{N}^+\ b^k = c \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^+\ a^k = c$. Priamy dôkaz implikácie. Predpokladajme, že $\exists k \in \mathbb{N}^+\ a^k = b \wedge \exists k \in \mathbb{N}^+\ b^k = c$. Z toho vieme, že $a^{k_1} = b \wedge b^{k_2} = c$ pre nejaké $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^+$. Potom $a^{k_1 k_2} = b^{k_2} = c$ a preto $\exists k \in \mathbb{N}^+\ a^k = c$, a to $k = k_1 k_2$.