Skúška z úvodu do diskrétnych štruktúr, 15.1.2019

Meno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$

1. *(4 × 3 body)* Definujte

a) Definujte zjednotenie dvoch množín.

b) Definujte tranzitívnu reláciu.

c) Definujte lexikografické usporiadanie.

d) Definujte $|A| = |B|$.

2. *(4 × 2 body)* Nech $\mathcal{T}$ je množina tranzitívnych relácií na množine $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Nech $A, B \in \mathcal{T}$. Nech R je relácia na množine $\mathcal{T}$. Ktoré z nasledujúcich viet sú vždy pravdivé (na vyznačené miesto napíšte "**P**"), vždy nepravdivé (na vyznačené miesto napíšte "**N**"), môžu byť aj pravdivé aj nepravdivé (na vyznačené miesto napíšte "**?**") a ktoré sú nie sú výroky (na vyznačené miesto napíšte "**X**").

a) $\emptyset \in \mathcal{T}$ $\boxed{}$; $(1,2) \in \mathcal{T}$ $\boxed{}$; $\{(1,2)\} \in \mathcal{T}$ $\boxed{}$; $\{\{(1,2)\}\} \in \mathcal{T}$ $\boxed{}$.

b) $\emptyset \subseteq \mathcal{T}$ $\boxed{}$; $(1,2) \subseteq \mathcal{T}$ $\boxed{}$; $\{(1,2)\} \subseteq \mathcal{T}$ $\boxed{}$; $\{\{(1,2)\}\} \subseteq \mathcal{T}$ $\boxed{}$.

c) $A \wedge B$ $\boxed{}$; $A \cap B$ $\boxed{}$; $2 \in A \cup M$ $\boxed{}$; $(A, B) \in R$ $\boxed{}$.

d) $((1,2),(1,2)) \in R$ $\boxed{}$; $(\{(1,2)\},\{(1,2)\}) \in R$ $\boxed{}$; $A \times B \subseteq R$ $\boxed{}$.

3. *(5 bodov)* Nech A a B sú dve neprázdne množiny. Dokážte, že ak $|A| \leq |B|$, potom existuje surjektívne zobrazenie z B do A.

4. *(5 bodov)* Nech R je relácia na množine M. Dokážte že $R \cup R^{-1}$ je najmenšia (vzhľadom na inklúziu) symetrická relácia obsahujúca reláciu R.

5. *(10 bodov)* Nech R je relácia ekvivalencie na množine M. Definujte rozklad množiny M. Definujte rozklad M indukovaný R. Dokážte, že rozklad M indukovaný R rozkladom množiny R.

6. *(7 bodov)* Dokážte, že nasledujúci zložený výrok je tautológia.

$$[(A \to B) \wedge (C \vee D) \wedge ((\neg A \wedge C) \to E)] \to [\neg B \to (E \vee D)].$$

7. *(7 bodov)* Nech A je relácia, ktorá je zobrazením z množiny M do množiny N. Dokážte, že $A^{-1} \circ A$ je relácia ekvivalencie.

8. *(9 bodov)* O nasledujúcich reláciách zistite, či sú reflexívne, či sú symetrické, a či sú tranzitívne. V prípade, že nie sú uveďte prvky, ktoré nespĺňajú príslušnú definíciu.

a) Relácia P na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x, y) \in P \Leftrightarrow x \cap y = \mathbb{Z}$.

Reflexívna: __________ Symetrická: ____________ Tranzitívna: ______________

b) Relácia Q na množine reflexívnych a symetrických relácií na $\{1, 2, 3\}$, taká že $(x, y) \in Q \Leftrightarrow x \circ y = y \circ x$. Pomôcka: dôležitá je relácia $I = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

Reflexívna: __________ Symetrická: ____________ Tranzitívna: ______________

c) Relácia R na $\mathbb{N}^+$, taká, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^+ \ \lceil x/y \rceil = 3k$

Reflexívna: __________ Symetrická: ____________ Tranzitívna: ______________

9. *(7 bodov)* Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(-2)^i}{i} \leq 2^{n-2}.$$

Riešenie príkladu č. 3:

Riešenie príkladu č. 4:

Riešenie príkladu č. 5:

Riešenie príkladu č. 6:

Riešenie príkladu č. 7:

Riešenie príkladu č. 9:

Poznámky:

Poznámky:

Poznámky:

Poznámky: