Skúška z úvodu do diskrétnych štruktúr, 5.1.2019

Meno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$

1. *(4 × 3 body)* Definujte

a) Definujte usporiadanú dvojicu.

b) Definujte zobrazenie.

c) Definujte rozklad množiny indukovaný reláciu ekvivalencie.

d) Definujte $|A| \leq |B|$.

2. *(4 × 2 body)* Nech $\mathcal{T}$ je množina neprázdnych symetrických relácií na množine $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Nech $A, B \in \mathcal{T}$. Nech R je relácia na množine $\mathcal{T}$. Ktoré z nasledujúcich viet sú vždy pravdivé (na vyznačené miesto napíšte "**P**"), vždy nepravdivé (na vyznačené miesto napíšte "**N**"), môžu byť aj pravdivé aj nepravdivé (na vyznačené miesto napíšte "**?**") a ktoré sú nie sú výroky (na vyznačené miesto napíšte "**X**").

a) $\emptyset \in \mathcal{T}$ $\boxed{}$; $(1, 2) \in \mathcal{T}$ $\boxed{}$; $\{(1, 2)\} \in \mathcal{T}$ $\boxed{}$; $\{\{(1, 2)\}\} \in \mathcal{T}$ $\boxed{}$.

b) $A \vee B$ $\boxed{}$; $A \cup B$ $\boxed{}$; $\emptyset \subseteq \mathcal{T}$ $\boxed{}$; $\{(1, 2)\} \subseteq \mathcal{T}$ $\boxed{}$; $\{\{(1, 2)\}\} \subseteq \mathcal{T}$ $\boxed{}$.

c) $1 \in M \cup \mathcal{T}$ $\boxed{}$; $A \circ B$ $\boxed{}$; $\exists x, y \in M : (x, y) \in A \cup B$ $\boxed{}$; $\{(A, B)\} \in R$ $\boxed{}$.

d) $A \times B \subseteq R$ $\boxed{}$; $(M \times M, M \times M) \in R$ $\boxed{}$; $(\{(1, 2), (2, 1)\}, \{(1, 2), (2, 1)\}) \in R$ $\boxed{}$.

3. *(5 bodov)* Nech A, B a C sú tri množiny. Dokážte, že ak $|A| = |B|$ a $|B| = |C|$ tak aj $|A| = |C|$.

4. *(5 bodov)* Nech R je relácia na množine M. Dokážte že ak $R \circ R = R$, tak je relácia R tranzitívna.

5. *(10 bodov)* Aký je vzťah $|A|$ a $|\mathcal{P}(A)|$. Svoje tvrdenie dokážte.

6. *(7 bodov)* Je množina bijektívnych involúcií z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ spočítateľná? Svoje tvrdenie dokážte. Zobrazenie f z množiny M do množiny M je involúcia ak $\forall x \in M \ f(f(x)) = x$.

7. *(6 bodov)* Majme ternárnu logickú spojku $f(A, B, C)$, ktorá je definovaná nasledujúcim spôsobom. Ak je vyrok A pravdivý, potom $f(A, B, C) \Leftrightarrow B$, inak $f(A, B, C) \Leftrightarrow C$. Zapíšte $f(A, B, C)$ pomocou tabuľky. Zapíšte $f(A, B, C)$ čo najjednoduchšie pomocou bežných binárnych logických spojok.

A	**B**	**C**	**f(A, B, C)**
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

____

8. *(4 body)* Vypíšte všetky ireflexívne ($\forall x\ (x, x) \notin R$) a tranzitivne relácie na množine $\{1, 2, 3\}$. Zoraďte ich podľa počtu prvkov.

____

____

____

9. *(6 bodov)* O nasledujúcich reláciách zistite, či sú reflexívne, či sú ireflexívne ($\forall x\ (x, x) \notin R$), či sú symetrické, a či sú tranzitívne. V prípade, že nie sú uveďte jeden príklad prvku/ov, ktoré nespĺňajú príslušnú definíciu.

a) Relácia P na $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, taká že $((x, y), (z, w)) \in P \Leftrightarrow x - w = z - y$.

Reflexívna: ______________ Ireflexívna: ______________

Symetrická: ______________ Tranzitívna: ______________

b) Relácia R na $\mathbb{Q}$, taká, že $x, y \in R \Leftrightarrow xy = 0$.

Reflexívna: ______________ Ireflexívna: ______________

Symetrická: ______________ Tranzitívna: ______________

10. *(7 bodov)* Nech $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pre všetky prirodzené čísla n. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n, $n > 1$, platí $F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n-1}$.

Riešenie príkladu č. 3:

Riešenie príkladu č. 4:

Riešenie príkladu č. 5:

Riešenie príkladu č. 6:

Riešenie príkladu č. 10:

Poznámky:

Poznámky: