Skúška z úvodu do diskrétnych štruktúr, 5.2.2019

Meno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$

1. *(4 × 3 body)* Definujte

a) Definujte reláciu na množine M.

____

____

b) Definujte usporiadanie (neostré, čiastočné).

____

____

c) Definujte najmenší prvok množiny.

____

____

d) Definujte spočítateľnú množinu.

____

____

2. *(4 × 2 body)* Nech $\mathcal{T}$ je množina všetkých neprázdnych relácií na množine $\mathbb{N}$. Nech $A, B \in \mathcal{T}$. Nech f je injektívne zobrazenie z $\mathcal{T}$ do $\mathcal{T}$. Ktoré z nasledujúcich viet sú vždy pravdivé (na vyznačené miesto napíšte "**P**"), vždy nepravdivé (na vyznačené miesto napíšte "**N**"), môžu byť aj pravdivé aj nepravdivé (na vyznačené miesto napíšte "**?**") a ktoré sú nie sú výroky (na vyznačené miesto napíšte "**X**").

a) $\mathbb{N}^2 \in \mathcal{T}$ $\boxed{}$; $(1,2) \in \mathcal{T}$ $\boxed{}$; $\{(1,2)\} \in \mathcal{T}$ $\boxed{}$; $\{\{(1,2)\}\} \in \mathcal{T}$ $\boxed{}$.

b) $\mathbb{N} \times \emptyset \subseteq \mathcal{T}$ $\boxed{}$; $\mathbb{N}^2 \subseteq \mathcal{T}$ $\boxed{}$; $\{(1,2)\} \subseteq \mathcal{T}$ $\boxed{}$; $\{\{(1,2)\}\} \subseteq \mathcal{T}$ $\boxed{}$.

c) $f(\{1\}) \in \mathcal{T}$ $\boxed{}$; $f(\mathbb{N}) \in \mathcal{T}$ $\boxed{}$; $f(\mathbb{N}^2) \in \mathcal{T}$ $\boxed{}$; $\{(\mathbb{N}^2, A)\} \in f$ $\boxed{}$.

d) $A \times B \subseteq f$ $\boxed{}$; $\forall x \in \mathcal{T}\ \exists y \in \mathcal{T}:\ (x,y) \in f$ $\boxed{}$; $\forall x \in \mathcal{T}\ \exists y \in \mathcal{T}:\ (y,x) \in f$ $\boxed{}$;

3. *(5 bodov)* Nech R je relácia na množine M. Dokážte, že ak je R reflexívna a tranzitívna, tak $R \circ R = R$.

4. *(5 bodov)* Nech R_1 a R_2 sú dve relácie ekvivalencie na množine M. O nasledujúcich tvrdeniach rozhodnite, či sú vždy pravdivé.

a) $R_1 \cap R_2$ je relácia ekvivalencie na množine M.

b) $R_1 \cup R_2$ je relácia ekvivalencie na množine M.

5. *(10 bodov)* Vyslovte a dokážte Cantor-Bernsteinovu vetu.

6. *(7 bodov)* Dokážte, že nasledujúci zložený výrok je tautológia.

$$[(\neg A \to B) \vee (C \wedge D) \vee (E \wedge \neg C \wedge A)] \to [(\neg B \wedge \neg C) \to A].$$

7. *(7 bodov)* Nech A a B sú dve množiny. Dokážte, ze ak $|A| \leq |B|$, potom $|A \times A| \leq |B \times B|$.

8. *(3 body)* Nech $M = \{0, 1\}$. Definujte čo najmenšiu (vzhľadom na počet prvkov relácie) reláciu na množine M^2, ktorá je čiastočným usporiadaním a má práve dva minimálne prvky.

____

____

____

9. *(6 bodov)* O nasledujúcich reláciách zistite, či sú reflexívne, či sú symetrické, a či sú tranzitívne. V prípade, že nie sú uveďte jeden príklad prvku/ov, ktoré nespĺňajú príslušnú definíciu.

a) Relácia P na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x, y) \in P \Leftrightarrow x \cap y = \mathbb{Z}$.

Reflexívna: __________ Symetrická: _____________ Tranzitívna: _______________

b) Relácia R na $\mathbb{Q}^+$, taká, že $x, y \in R \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Q}^+ \; xy = k^2$.

Reflexívna: __________ Symetrická: _____________ Tranzitívna: _______________

10. *(7 bodov)* Dokážte, že pre každé kladné prirodzené číslo n platí

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor n/2^i \rfloor \leq n - 1.$$

Ak príklad neviete vyriešiť vo všeobecnosti, dokážte tvrdenie aspoň keď n je mocnina dvojky.

Riešenie príkladu č. 3:

Riešenie príkladu č. 4:

Riešenie príkladu č. 5:

Riešenie príkladu č. 5 (pokračovanie):

Riešenie príkladu č. 6:

Riešenie príkladu č. 7:

Riešenie príkladu č. 10:

Poznámky:

Poznámky:

Poznámky: