

Priamy dôkazy

Čo je to dôkaz.

Postupnosť krokov môžeme vždy napísať tautológiu.

Odvodzovacie pravidlo A, B, C odvod' D môžeme používať ak A a B a C \rightarrow D je tautológia

Môžeme používať "vzorec", ak je A \leftrightarrow B tautológia, môžeme nahradiť v ľubovoľnom výraze výraz A výrazom B.

Mimochodom ak si niekde bokom dokážeme, že niečo je tautológia môžeme to používať aj ako tautológiu aj ako odvodzovacie pravidlo, aj ako "vzorec" (a podobne ako keď používame vzorce, môžeme si zvoliť význam jednotlivých symbolov).

Samozrejme všetko sa "dá" urobiť tabuľkou.

Pre toto cviko, sa dohodneme, že tabuľky s viac ako 4-mi riadkami sa nám nechce robiť alebo 5-mi stĺpcami. (budeme používať iba jednoduché tautológie, odvodzovacie pravidlá, vzorčky)

Dokážte $[(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)] \rightarrow [(P \vee R) \rightarrow (Q \vee S)]$

- $[(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee S)] \rightarrow [\neg P \vee \neg R \vee Q \vee S]$ // $(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$
- $[(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee S)] \rightarrow [\neg(P \wedge R) \vee Q \vee S]$ // vzorec demorganove pravidla
- $[(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)] \rightarrow [\neg(P \wedge R) \vee Q \vee S]$ // 2x vzorec $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
- $[(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)] \rightarrow [(P \vee R) \rightarrow (Q \vee S)]$ // vzorec $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

Priamy dôkaz implikácie

Praca s alebo (delenie na prípady).

Dokážte $[(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)] \rightarrow [(P \vee R) \rightarrow (Q \vee S)]$

Predpoklad: $[(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)]$

Záver: $[(P \vee R) \rightarrow (Q \vee S)]$

Predpoklad: $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)$

Predpoklad: P alebo R

Záver: Q alebo S

- $[(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)]$ // predpoklad
- P alebo R // predpoklad
- $(P \rightarrow Q)$ // $A \wedge B \rightarrow A$
- $(R \rightarrow S)$ // $A \wedge B \rightarrow B$
- a. P // podľa 2 prípad 1
- a. Q // A, $A \rightarrow B$ odvod' B
- a. Q alebo S // A odvod' A alebo B
- b. R // podľa 2 prípad 2
- b. S // A, $A \rightarrow B$ odvod' B
- b. Q alebo S // B odvod' A alebo B
- Q alebo S // V oboch prípadoch platí

(Tento dôkaz trpíu tým, že defakto sa dokazovaná identita používa, ale whatever...)

Dokážte $(P \rightarrow Q) \rightarrow [(P \vee R) \rightarrow (Q \vee R)]$

- $P \rightarrow Q$
- P alebo R
- a. P
- a. Q
- a. Q alebo R
- a. R
- a. Q alebo R
- Q alebo R

Ďalšie priamy dôkaz implikácie:

$[(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow [(P \vee Q) \rightarrow R]$

$[(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)] \rightarrow [P \rightarrow (Q \wedge R)]$

$[(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)] \rightarrow [P \rightarrow (Q \vee R)]$

A a (B alebo C) \leftrightarrow (A a B) alebo (A a C) // dokazu sa ako lemy dve implikácie a potom sa to spoju

A alebo (B a C) \leftrightarrow (A alebo B) a (A alebo C) // dokazu sa ako lemy dve implikácie

Dôkaz sporom

Tie isté príklady