

V zadaniach používam znacky ako v TeXu

\cup = zjednotenie

\cap = prienik

\bigcap \bigcup – veľký prienik a zjednotenie (ako v sumovej notácii)

\subseteq = podmnožina

\circ = skladanie relácií (koliesko)

\times = karteziánsky súčin

\mathbb{Z} celé čísla

\mathbb{R} reálne čísla

Cvičenie 7

1. Nech D a E sú relácie z A do B . Dokážte, že $(D \cap E)^{-1} = D^{-1} \cap E^{-1}$.
2. $T \subseteq M^2$; dokážte, že ak je T reflexívna a tranzitívna, tak $T \circ T = T$; platí aj obrátené tvrdenie?
3. Nech D je relácia na X
 - a) Dokážte, že $D \cup D^{-1}$ je najmenšia symetrická relácia na X obsahujúca D , t.j. ak T je symetrická relácia na X obsahujúca D , tak $D \cup D^{-1} \subseteq T$.
 - b) Dokážte, že $D \cap D^{-1}$ je najväčšia symetrická relácia na X obsiahnutá v D .
4. Nech D je relácia ekvivalencie na množine A . Je D^{-1} tiež relácia ekvivalencie na A ?
5. Nech $D \subseteq A \times B$ a $E \subseteq B \times C$. Dokážte, že $(E \circ D)^{-1} = D^{-1} \circ E^{-1}$.

Cvičenie 8 (čiastočne asi aj cvičenie 9)

1. Nech $a_1=5$, $a_2=13$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, dokážte, že $a_n = 2n + 3n$
2. V turnaji je n tímov. Každá dvojica tímov $\{A,B\}$ odohrá jeden zápas, ktor sa skončí buď víťazstvom tímu A alebo B . Dokážte, že tímy možno zoradiť do postupnosti T_1, T_2, \dots, T_n tak, že pre každé $1 \leq k < n$ tím k vyhral nad tímom $k+1$
3. Nech W je neprázdny systém relácií ekvivalencie na X . Dokážte, že aj $\bigcap_{R \in W} R$ je relácia ekvivalencie na množine X .
4. Nájdite Rozklad indukovaný reláciou ekvivalencie: zvyškové triedy ako rozklad \mathbb{Z}
5. nájdite triedy rozkladu indukovaného reláciou $R \subseteq \mathbb{Z}^2$, $xRy \iff |x|=|y|$
6. nájdite triedy rozkladu indukovaného reláciou $S \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $xSy \iff |x|=|y|$, kde $|x|$ označuje dĺžku vektora x .
7. Označme $T = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x-y \in \mathbb{Z} \}$ a $U = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x-y \in \mathbb{Q} \}$. Dokážte, že T aj U sú relácie ekvivalencie na \mathbb{R} . Opíšte rozklady množiny \mathbb{R} indukované týmito reláciami.
8. Nech E je relácia ekvivalencie na množine X a T je relácia ekvivalencie na množine Y . Nech $P \subseteq (X \times Y) \times (X \times Y)$ je relácia definovaná vzťahom: $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in P \iff (x_1, x_2) \in E \text{ and } (y_1, y_2) \in T$. Dokážte, že P je relácia ekvivalencie na množine $X \times Y$.
9. Koľko je všetkých relácií ekvivalencie na štvorprvkovej množine? Koľko je ich na päťprvkovej množine? (Návod: nájdite všetky rozklady množiny.)
10. Nech D je relácia na množine A . Definujte D^* . Ukážte, že D^* je najmenšia (vzhľadom na inklúziu) reflexívno-tranzitívna relácia na A obsahujúca D .
11. Označme \mathcal{M} množinu všetkých uzavretých intervalov $\langle a, b \rangle$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Definujme na množine \mathcal{M} reláciu R takto: $(I, J) \in R$, ak $\sin(I) = \sin(J)$. Dokážte, že R je relácia ekvivalencie.