

Cvičenie 12 a 13: mohutnosti

Úloha 1. Nájdite bijekciu medzi množinami:

- a) polkružnica bez krajných bodov a priamka
- b) štvorec a kruh
- c) $(0, 1)$ a $\langle 0, 1 \rangle$
- d) polkružica s krajnými bodmi a priamka

Úloha 2. Rozhodnite, či nasledovné množiny sú spočítateľné. Je ich mohutnosť rovná mohutnosti $\mathbb{N}$ alebo $\mathbb{R}$?

- a) $\mathbb{Q}$
- b) množina konečných podmnožín prirodzených čísel
- c) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$
- d) množina konečných postupností prirodzených čísel ($\mathbb{N}^*$)
- e) množina nekonečných postupností prirodzených čísel ($\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$)
- f) množina algebraických čísel, teda takých čísel, ktoré sú koreňmi nejakého mnohočlena s celočíselnými koeficientmi (napr. $4/17$, $\sqrt{2}$, i)
- g) ľubovoľná množina disjunktných otvorených intervalov
- h) množina gúľ v priestore

Úloha 3. Dokážte, že množina je nekonečná vtedy a len vtedy, keď je ekvivalentná niektorej svojej podmnožine.

Úloha 4. Porovnajte mohutnosti nasledovných množín:

- a) $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$
- b) $\mathbb{R}$ a množina funkcií $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- c) $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ a množina funkcií $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Úloha 5. Dokážte, že kardinálnych čísel je nekonečne veľa