Cvičenie 2: kvantifikátory

Úloha 1. Aký význam budú mať výroky $(\forall x)a(x)$, $(\exists x)a(x)$ ak sú definované na a) jednoprvkovej b) prázdnej množine?

Úloha 2. Určte, o čom hovoria nasledujúce výroky, určte ich pravdivostnú hodnotu a znegujte ich. (Uvažujeme univerzum $M = \mathbb{Z}$, ak nie je napísané ináč.)

a) $(\exists x)(x \in \mathbb{N})$

b) $(\exists x)(x \in \mathbb{N} \wedge x > 5)$

c) $(\forall x)(x^2 > 0)$

d) $(\exists x)(x \bmod 2 = 0 \vee x \bmod 2 = 1)$

e) $(\forall x)(x \bmod 2 = 0 \vee x \bmod 2 = 1)$

f) $(\exists x)(x \bmod 2 = 0 \wedge x \bmod 2 = 1)$

g) $(\forall x)(\forall y)[(x > 0 \wedge y > 0) \to (x \cdot y > 0)]$

h) $(\forall a)(\forall b)[(a \in \mathbb{Q} \wedge b \in \mathbb{Q} \wedge a \neq b) \to (\exists c)(c \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \wedge a < c < b)]$, univerzum: $M = \mathbb{R}$.

i) $(\forall a)(\forall b)[(a \notin \mathbb{Q} \wedge b > 0) \to (\exists c)(c \in \mathbb{Q} \wedge |a - c| < b)]$, univerzum: $M = \mathbb{R}$.

j) $(\forall a)(\forall b)[(a \in \mathbb{N}^+ \wedge b \in \mathbb{N}^+) \to (\exists c)(c \neq 0 \wedge a^2 - 2b^2 = c)]$

k) $(\forall a)[a \in \mathbb{N}^+ \to (\exists b)[b \in \mathbb{N} \wedge (\forall c)((c \in \mathbb{N} \wedge c > b) \to c^a < 2^c)]]$

Úloha 3. Výrok s „klasickým“ použitím kvantifikátorov $(\forall a \in A)(\exists b \in B)p(a, b)$ chceme ekvivalentne prepísať na „formálne“ použitie kvantifikátorov. Môžeme to spraviť takto $(\forall a)(\exists b)[a \in A \to (b \in B \wedge p(a, b))]$?

Úloha 4. Zistite, či nasledovné výroky sú tautológie (ak áno, stačí intuitívne zdôvodnenie):

a) $(\forall x)a(x) \to (\exists x)a(x)$

b) $(\exists x)a(x) \to (\forall x)a(x)$

c) $(\forall x)(a(x) \to b(x)) \to ((\forall x)a(x) \to (\forall x)b(x))$

d) $((\forall x)a(x) \to (\forall x)b(x)) \to (\forall x)(a(x) \to b(x))$

e) $(\exists x)(a(x) \to b(x)) \to ((\forall x)a(x) \to (\exists x)b(x))$

f) $((\forall x)a(x) \to (\exists x)b(x)) \to (\exists x)(a(x) \to b(x))$

Úloha 5. Zostavte výrokové formy, ktoré budú hovoriť nasledovné:

a) $e(a)$: a je párne číslo

b) $d \mid a$: číslo a je deliteľné číslom d.

c) $p(x)$: x je prvočíslo

d) $a \bmod d = z$: a dáva zvyšok z po delení číslom d

Poznámka. Premenné použité v týchto výrokových formách môžu byť väčšinou brané len z niektorých množín (napr. celé čísla). Tieto zamlčané podmienky si doplňte podľa toho, ako sú známe.

Úloha 6. Zapíšte nasledovné výroky (môžete používať výrokové formy z predchádzajúcej úlohy):

a) Existuje práve jedno párne celé číslo.

b) Prvočísel je nekonečne veľa.

c) Pre každé celé čísla a, d ($d \neq 0$) vieme jednoznačne určiť zvyšok čísla a po delení číslom d.