Cvičenie 3: dôkazy

Priamy dôkaz

Úloha 1. Máme reálne čísla a, b, c také, že čísla

$$\frac{1}{b+c}, \qquad \frac{1}{c+a}, \qquad \frac{1}{a+b}$$

tvoria aritmetickú postupnosť. Dokážte, že aj čísla a^2, b^2, c^2 tvoria aritmetickú postupnosť.

Úloha 2. Dokážte, že nasledovné tvrdenia sú tautológie

a) $[(A \to B) \wedge (C \vee D) \wedge ((\neg A \wedge C) \to E)] \to [\neg B \to (E \vee D)]$

b) $[(A \to B) \wedge (\neg B \vee C)] \to [((C \to D) \wedge A) \to D]$

Úloha 3. Zistite, či nasledovné výroky sú tautológie. Ak áno, dokážte ich platnosť. Ak nie, nájdite kontrapríklad.

a) $(\forall x)a(x) \to (\exists x)a(x)$

b) $(\exists x)a(x) \to (\forall x)a(x)$

c) $(\forall x)(a(x) \to b(x)) \to ((\forall x)a(x) \to (\forall x)b(x))$

d) $((\forall x)a(x) \to (\forall x)b(x)) \to (\forall x)(a(x) \to b(x))$

e) $(\exists x)(a(x) \to b(x)) \to ((\forall x)a(x) \to (\exists x)b(x))$

f) $((\forall x)a(x) \to (\exists x)b(x)) \to (\exists x)(a(x) \to b(x))$

Úloha 4. Dokážte, že ak existuje nekonečne veľa palindromických prvočísel (čítajú sa rovnako spredu aj odzadu), tak existuje aj nekonečne veľa palindromických prvočísel, ktoré majú nepárny počet cifier.

Dôkaz sporom

Úloha 5. Dokážte, že prvočísel je nekonečne veľa.

Úloha 6. Dokážte, že $\sqrt{2}$ je iracionálne číslo.

Mix

Úloha 7. Dokážte, že ak a, b sú racionálne čísla, tak aj $a \cdot b$ je racionálne číslo.

Úloha 8. Dokážte, že ak súčin dvoch reálnych čísel x a y je iracionálne číslo, musí byť aspoň jedno z čísel x a y iracionálne.

Úloha 9. Dokážte, že ak $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ pre nejaké racionálne čísla a, b, tak aj $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$, aj $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.

Úloha 10. Nech a, b sú kladné celé čísla opačnej parity. Dokážte, že ak nemožno krátiť zlomok $\frac{a}{b}$, tak nemožno krátiť ani zlomok $\frac{a-b}{a+b}$.

Úloha 11. Dokážte, že $\log_2 3$ je iracionálne číslo.

Úloha 12. Dokážte, že ak x, y sú celé čísla pre ktoré platí $31 \mid 6x + 11y$, potom aj $31 \mid x + y$.

Úloha 13. Nech a, b, c sú reálne čísla, pre ktoré platí $a + b + c = 0$. Dokážte, že

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = -3.$$

Úloha 14. Dokážte, že neexistuje mnohočlen $f(x)$ s celočíselnými koeficientmi, pre ktorý by platilo $f(7) = 11$ a $f(11) = 13$.

Úloha 15. Dokážte, že ak e (eulerova konštanta) nie je riešením polynomiálnej rovnice s celočíselnými koeficientmi, tak ani $2e$ nie je.

Úloha 16. Je číslo $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ racionálne?