Cvičenie 4: matematická indukcia

Úlohy na cvičenie

Úloha 1. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Ďalšie úlohy na dokazovanie súčtov nájdete v `http://www.dcs.fmph.uniba.sk/~lukotka/UDDS/zbierka.pdf`, str. 10.

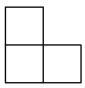
Úloha 2. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí $31 \mid 5^{n+1} + 6^{2n-1}$.

Úloha 3. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí $2n < 3^n$

Úloha 4. Dokážte, že pre ľubovoľných n reálnych čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, z ktorých je každé aspoň 1 platí

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq n - 1 + a_1 a_2 \ldots a_n.$$

Úloha 5. Máme štvorčekovú sieť rozmerov $2^n \times 2^n$ štvorčekov, na ktorej je jedno políčko čierne, zvyšné sú biele. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n vieme štvorčekovú sieť vydláždiť dlaždicami v tvare triomina L (ako na obrázku) tak, že sa dlaždice nebudú prekrývať a každé biele políčko bude zakryté dlaždicou. Dlaždice vieme aj otáčať.



Úloha 6. Do radu ľubovoľne rozložíme n mincí, kde n je nepárne prirodzené číslo. Každú mincu otočíme buď znakom nahor, alebo hlavou nahor. Potom spravíme n ťahov. V i-tom ťahu si vyberieme i mincí a všetkých vybraných i mincí otočíme na opačnú stranu. Dokážte, že bez ohľadu na počiatočné otočenie mincí vieme mince otáčať tak, aby v jednom momente boli všetky mince otočené rovnakou stranou.

Ďalšie úlohy na precvičovanie

Úloha 7. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí:

a) $3 \mid n^3 - n$

b) $5 \mid n^5 - n$

c) $133 \mid 11^{n+1} + 12^{2n-1}$

Úloha 8. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré platí nerovnosť:

a) $2^n \geq n$

b) $3^n < n!$

c) $(2n)! < 2^{2n} \cdot (n!)^2$

Úloha 9. V rovine je rozmiestnených n kružníc, z ktorých každá pretína všetky ostatné. Dokážte, že oblasti roviny, ktoré tieto kružnice vyčleňujú, možno ofarbiť dvoma farbami tak, aby žiadne dve susedné oblasti nemali rovnakú farbu.

Úloha 10. V bani s neobmedzeným množstvom poschodí, ktoré sú zhora nadol očíslované $-1, -2, -3, \ldots$, pracuje niekoľko (konečne veľa) trpaslíkov. Každý deň, v rovnakom čase, z každého poschodia, na ktorom sa nachádzajú aspoň dvaja trpaslíci, sa práve jeden trpaslík presunie nadol o toľko poschodí, koľko kolegov mal v ten deň na svojom poschodí. Dokážte, že po určitom (konečnom) počte dní bude na každom poschodí najviac jeden trpaslík.

Náročnejšie úlohy

Úloha 11. Nech a_1, a_2, …, a_n je n kladných reálnych číslel. Dokážte, že

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leq n - 1 + \prod_{i=1}^{n} \max(1, a_i),$$

teda

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq n - 1 + \max(1, a_1)\max(1, a_2) \cdots \max(1, a_n).$$

Úloha 12. Dokážte, že pre ľubovoľných n kladných reálnych čísel x_1, x_2, …, x_n so súčinom 1 platí

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n.$$

Úloha 13. Dokážte, že pre ľubovoľných n kladných reálnych čísel x_1, x_2, …, x_n platí nerovnosť

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

Úloha 14. Dokážte, že pre každé prvočíslo p a každé prirodzené číslo n platí $p \mid n^p - n$.

Úloha 15. Turnaja sa zúčastnilo n tímov. Každá (neusporiadaná) dvojica tímov odohrala práve jeden zápas. Každý zápas sa skončil výhrou niektorého tímu. Dokáže, že tímy možno zoradiť do postupnosti t_1, t_2, …, t_n tak, že tím t_1 vyhral nad tímom t_2, tím t_2 nad t_3 a tak ďalej až tím t_{n-1} vyhral nad tímom t_n.

Úloha 16. Nech x je reálne číslo a $x + \frac{1}{x}$ je celé číslo. Dokážte, že potom aj $x^n + x^{-n}$ je celé číslo pre všetky prirodzené čísla n.