

Cvičenie 6 a 7: relácie

Úloha 1. Majme reláciu M z množiny $\{a, b, c, d\}$ do množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ a reláciu N na množine $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, ktoré máme zadané nasledovne:

$$M = \{(a, 2), (a, 5), (b, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 5)\},$$
$$N = \{(1, 1), (1, 3), (1, 2), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 5)\}.$$

Vypíšte relácie M^{-1} , N^{-1} , MN a NM (ak existujú).

Úloha 2. Nech D a E sú relácie medzi prvkami množín A a B . Dokážte, že $(D \cap E)^{-1} = D^{-1} \cap E^{-1}$.

Úloha 3. Nech D je relácia medzi prvkami množín A a B a nech E je relácia medzi prvkami množín B a C . Dokážte, že potom $(DE)^{-1} = E^{-1}D^{-1}$.

Úloha 4. Aké relácie poznáte zo strednej školy? Pre každú z nich určte, či je reflexívna, ireflexívna, symetrická, tranzitívna a atranzitívna.

Úloha 5. Rozhodnite, či relácia R je reflexívna, ireflexívna, symetrická, tranzitívna a atranzitívna:

a) $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; (|a + b| - 24)(|a - b| - 24) = 0\}$

b) $R = \{(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; |r + s| = |3 + r - s|\}$

c) $R = \{(r, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; |r + s| = |3 + r - s|\}$

d) $R = \{(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; (cd + 100)(cd - 60) = 0\}$

e) $R = \{(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; c - d = 4\}$

f) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x - y \in \mathbb{Z}\}$

g) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; |x + y||x - y| \leq 3\}$

Úloha 6. Dokážte, že ak R je tranzitívna relácia, tak aj R^{-1} je tranzitívna relácia.

Úloha 7. Ktoré z relácií z úlohy 5 sú reláciami ekvivalencie? Aký rozklad určujú?

Úloha 8. Dokážte, že nasledovná relácia je reláciou ekvivalencie

$$R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; 5 \mid (a - b)\}.$$

Aký rozklad určuje? Čo ak by sme číslo 5 zamenili za ľubovoľné iné celé číslo?

Úloha 9. Nech M je množina a $\mathcal{R}$ je množina všetkých relácií na množine M . Je $\mathcal{R}$ s operáciou $\circ$ skladania relácií grupa? Je skladanie relácií komutatívne?

Úloha 10. (*) Uvažujme relácie $| <$ a $<|$ na celých číslach ($a | b$ znamená, že a delí b). Vyjadrite relácie $| <$ a $<|$.