

Cvičenie 8: uzávery relácií

Úloha 1. Anička si na tabuľu napísala číslo 1. V jednom kroku môže Anička spraviť jeden z nasledujúcich ťahov

- Zmaže číslo na tabuli a nahradí ho číslom o 4 väčším.
 - Pokiaľ je číslo na tabuli deliteľné tromi, tak ho zmaže a nahradí ho 3-krát menším číslom.
- a) Opíšte situáciu s úlohy pomocou relácie. Definujte reláciu, ktorá bude vyjadrovať, z ktorého čísla môže Anička dostať ktoré v jednom kroku.
- b) Pomocou vami definovanej relácie zapíšte množinu všetkých čísel, ktoré vie Anička dostať na tabuli po konečnom počte krokov, ak začína s jednotkou (iba definujte množinu podľa tohto opisu).
- c) Vyjadrite, o akú množinu ide a formálne dokážte svoje tvrdenie.

Úloha 2. Nech D je relácia na X . Dokážte, že

- a) D^+ je najmenšia tranzitívna relácia na množine X obsahujúca D .
- b) D^* je najmenšia reflexívna a tranzitívna relácia na množine X .
- c) $D \cup D^{-1}$ je najmenšia symetrická relácia na X obsahujúca D , t. j. ak T je symetrická relácia na X obsahujúca D , tak $D \cup D^{-1} \subseteq T$.
- d) $D \cap D^{-1}$ je najväčšia symetrická relácia na X obsiahnutá v D .

Poznámka. Pod pojmom najmenšia relácia s nejakou vlastnosťou, myslíme najmenšia vzhľadom na inklúziu. Bližšie vysvetlenie je v úlohe c).

Úloha 3. Koľko je všetkých relácií ekvivalencie na štvorprvkovej množine? Koľko je ich na päťprvkovej množine?

Úloha 4. Nech W je neprázdny systém relácií ekvivalencie na množine X . Dokážte, že aj $\bigcap_{R \in W} R$ je relácia ekvivalencie na množine X .