Cvičenie 9: usporiadania

Úloha 1. Pri každú z nasledovných relácií určte, či je reflexívna, antisymetrická, asymetrická, tranzitívna, trichotomická. Určite, či sú usporiadaním, resp. úplným usporiadaním. Ak áno, určte ich minimálne, maximálne, najmenšie a najväčšie prvky.

a) $\emptyset$ (na množine M)

b) $M \times M$ (na množine M)

c) R^{-1}, R je ľubovoľné usporiadanie

d) $| = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ (\exists k \in \mathbb{Z})(ka = b)\}$

e) Každá príšera má svoj útok a obranu, čo sú dve prirodzené čísla. Hovoríme, že jedna príšera *poráža* druhú, pokiaľ má aj útok, aj obranu aspoň takú, ako druhá príšera. Formálne definujte príšeru a reláciu poráža a určte vlastnosti tejto relácie. Ide o usporiadanie?

f) $R = \{(A, B) \in \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M);\ A \subseteq B\}$

g) $S = \{((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2;\ a + b \leq c + d\}$

Úloha 2. Nech φ je neprázdny systém čiastočných usporiadaní množiny A. Dokážte, že potom aj $\bigcap \varphi$ je čiastočné usporiadanie množiny A. Platí podobné tvrdenie aj pre neprázdny systém usporiadaní na množine A?

Úloha 3. Nech φ, τ sú dva rozklady na množine $X \neq \emptyset$. Hovoríme, že $\varphi < \tau$ (alebo, že rozklad φ je menší ako τ), ak ku každej množine $M \in \varphi$ existuje taká množina $P \in \tau$, že $M \subseteq P$. Dokážte, že $<$ je čiastočné usporiadanie systému všetkých rozkladov množiny M.

Úloha 4. Pre zadané nezáporné celé čísla m, n nájdite usporiadanú množinu, ktorá bude mať n maximálnych a m minimálnych prvkov.

Úloha 5. (*) Možno na množine $\mathbb{N}^2$ definovať úplné usporiadanie?