Písomka z Úvodu do diskrétnych štruktúr

13. 11. 2019

Úloha 1. *(4 body) Znegujte výrok:*

$$(\exists x)[(\neg a(x) \vee (\forall y)b(x,y)) \to (c(x) \vee d(x))].$$

Riešenie. $(\forall x)[(\neg a(x) \vee (\forall y)b(x,y)) \wedge \neg c(x) \wedge \neg d(x)]$.

Úloha 2. *(5 bodov) Dokážte, že nasledovný zložený výrok je tautológia*

$$[A \wedge \neg B \wedge (C \to \neg D)] \to [(B \vee C) \to (D \to E)].$$

Riešenie. Výrok dokážeme priamo. Dokazovaný výrok má formu implikácie, preto môžeme predpokladať, že platí

$$A \wedge \neg B \wedge (C \to \neg D), \tag{1}$$

z čoho vieme, že platia výroky

$$A, \tag{2}$$
$$\neg B, \tag{3}$$
$$C \to \neg D. \tag{4}$$

Výrok $(B \vee C) \to (D \to E)$, ktorého platnosť chceme teraz dokázať má opäť formu implikácie, teda si môžeme do predpokladov pridať

$$B \vee C.$$

Chceme dokázať, že $D \to E$. Z platnosti $\neg B$ a $B \vee C$ máme, že musí platiť C. Potom vďaka platnosti $C \to$ máme, že platí $\neg D$, teda D neplatí. Preto je implikácia $D \to E$ pravdivá, čo sme chceli dokázať.

Úloha 3. *(5 bodov) Dokážte, že pre všetky celé čísla $n > 1$ platí*

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

Riešenie. Tvrdenie dokážeme matematikcou indukciou vzhľadom na n. Pre $n = 2$ dostávame

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}, \qquad | \cdot\sqrt{2}$$
$$\sqrt{2} + 1 < 4,$$

čo platí, keďže $\sqrt{2} + 1 \leq 2 + 1 = 3$.

Predpokladajme teraz, že pre nejaké celé číslo $n > 1$ platí

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} \tag{5}$$

a chceme ukázať, že potom platí

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}. \tag{6}$$

Vďaka indukčnému predpokladu vieme, že platí

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \tag{7}$$

teda nám stačí ukázať, že platí

$$2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}. \tag{8}$$

To si vieme upraviť nasledovne:

$$\begin{aligned}
2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} &< 2\sqrt{n+1}, \qquad | \cdot \sqrt{n+1} \\
2\sqrt{n(n+1)} + 1 &< 2n+2, \\
2\sqrt{n^2+n} &< 2n+1, \qquad |\ ^2 \\
4n^2 + 4n &< 4n^2 + 4n + 1, \\
0 &< 1.
\end{aligned}$$

Keďže pri umocňovaní boli obe strany nerovnosti kladné a násobili sme len kladným číslom $\sqrt{n+1}$, tak všetky úpravy boli ekvivalentné. Preto nerovnosť (8) platí. Keďže vieme, že platia nerovnosti (8) a (7), tak vďaka tranzitívnosti platí aj nerovnosť (6), ktorú sme chceli dokázať. Dôkaz indukciou je tak hotový.

Úloha 4. *(5 bodov) Dokážte, že ak e je iracionálne číslo, tak aj $\frac{3\sqrt{e}-4}{17}$ je iracionálne číslo.*

Riešenie. Tvrdenie dokážeme nepriamo. Nech $\frac{3\sqrt{e}-4}{17}$ je racionálne číslo. To znamená, že ho možno vyjadriť v tvare

$$\frac{3\sqrt{e}-4}{17} = \frac{p}{q},$$

kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Úpravou dostaneme, že

$$\begin{aligned}
\frac{3\sqrt{e}-4}{17} &= \frac{p}{q}, \\
3\sqrt{e} &= \frac{17p}{q} + 4, \\
\sqrt{e} &= \frac{17p+4q}{3q}, \\
e &= \frac{(17p+4q)^2}{9q^2}.
\end{aligned}$$

Keďže $(17p+4q)^2 \in \mathbb{Z}$ a $9q \in \mathbb{Z} - \{0\}$, tak e je racionálne číslo, čo sme chceli dokázať.

Úloha 5. *(6 bodov) Nech A, B, C sú množiny. Dokážte, že $A \subseteq C$ práve vtedy, keď $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.*

Riešenie.

„$\Rightarrow$“ Nech $A \subseteq C$. Chceme dokázať, že $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$, teda že $(\forall x)(x \in A \cup (B \cap C) \leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap C)$. Pre ľubovoľné x platí

$$x \in A \cup (B \cap C) \rightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C).$$

- Ak $x \in A$, tak aj $x \in A \cup B$ a vďaka tomu, že $A \subseteq C$, tak aj $x \in C$. Preto $x \in (A \cup B) \cap C$.
- Ak $x \in B \wedge x \in C$, tak musí platiť aj $x \in A \cup B$, a teda aj $x \in (A \cup B) \cap C$.

„$\Leftarrow$“ Nech $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$. Chceme dokázať, že $A \subseteq C$. Nech teda $x \in A$. Potom $x \in A \cup (B \cap C)$. Vďaka predpokladanej rovnosti množín platí aj $x \in (A \cup B) \cap C$, z čoho už máme, že $x \in C$.

Úloha 6. *(5 bodov) Zistite, či nasledovná relácia R je reflexívna, symetrická, tranzitívna*

$$R = \{(a,b) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+;\ \sqrt{ab} \in \mathbb{Q}^+\}.$$

Riešenie. Relácia je reflexívna, lebo pre ľubovoľné $a \in \mathbb{Q}$ platí $\sqrt{aa} = a \in \mathbb{Q}^+$, teda $(a, a) \in R$.

Relácia je symetrická, lebo $(a, b) \in R \to \sqrt{ab} \in \mathbb{Q}^+ \to \sqrt{ba} \in \mathbb{Q}^+ \to (b, a) \in \mathbb{Q}^+$.

Ukážeme, že relácia je aj tranzitívna. Pre ľubovoľné a, b, $c \in \mathbb{Q}^+$ platí

$$\begin{aligned}
&(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \to \\
&\to \sqrt{ab} \in \mathbb{Q}^+ \wedge \sqrt{bc} \in \mathbb{Q}^+ \to \\
&\to \sqrt{ab}\sqrt{bc} \in Q^+ \to \\
&\to \sqrt{ac} \cdot b \in \mathbb{Q}^+ \to \\
&\to \sqrt{ac} \in \mathbb{Q}^+.
\end{aligned}$$

Využili sme pritom, že súčin a podiel dvoch kladných racionálnych čísel je opäť kladné racionálne číslo.