

Úvod do matematickej logiky

LP, ILP, B&B

Robert Lukotka

`lukotka@dcs.fmph.uniba.sk`

`www.dcs.fmph.uniba.sk/~lukotka`

M-255

Lineárne programovanie

- Množina premenných: $x_1, \dots, x_n$.
- Cieľová funkcia: $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$
- Obmedzenia, nerovnosti: $a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + \dots + a_{ni}x_n \leq b_i$, pre $i \in \{1, \dots, j\}$.
- Obmedzenia, rovnosti: $c_{1i}x_1 + c_{2i}x_2 + \dots + c_{ni}x_n = d_i$, pre $i \in \{1, \dots, k\}$.

V maticovom zápise

$$\max\{c^T x \mid Ax \leq b \wedge Cx = d\},$$

kde A a C sú matice, b , d , x sú vektory reálnych čísel.

Lineárne programovanie

Ak chceme vyriešiť problém LP, nemusíme pracovať s oboma typmi obmedzení:

- Na obmedzenia v tvare rovnosti možno použiť substitúciu a zbaviť sa rovníc.
 - Nahradenie rovnosti dvoma nerovnosťami je zlý nápad.
- Obmedzenia v tvare nerovnosti možno nahradiť obmedzeniami v tvare $x_i \geq 0$.

Lineárne programovanie - zložitosť

- Existuje slabo polynomiálny algoritmus.
- Pre mnohé triedy LP existuje silno polynomiálny algoritmus.
Napríklad
 - LP pre maximálny tok.
- Ako mnohé iné výpočty spoliehajúce sa na prácu s necelými číslami, numerická stabilita môže byť problémom.

Lineárne programovanie, algoritmy

- Simplexová metóda:
 - Hľadá optimálne riešenie prechádzaním po vrchoch a hranách polytopu.
 - V najhoršom prípade exponenciálna zložitosť, v praxi však funguje dobre (na náhodných inštanciách kubický počet aritmetických operácií).
- Metódy vnútorných bodov:
 - Prechádzajú vnútrom polytopu.
 - Zložitosť - rôzna, $O(n^3)$ aritmetických operácií, v niektorých prípadoch aj lepšia (často závisí od algoritmu na násobenie matíc).

LP - príklady

Majme graf, vrcholy reprezentujú úlohy, hrany reprezentujú úlohy, ktoré nemožno robiť naraz. Všetky úlohy trvajú rovnako dlho. Koľkokrát vieme splniť všetky úlohy za jednotku času (v rámci nepretržitej prevádzky).

- Premenné všetky maximálne nezávislé množiny.
- Súčet vo vrchole musí byť aspoň 1 (sčítavame premenné zodpovedajúce množinám obsahujúcich vrchol).
- Minimalizujeme súčet premenných. V limitnom prípade toto predstavuje čas potrebný na splnenie všetkých úloh (v rámci sústavnej prevádzky).

Príklad: kružnica na 5-tich vrcholoch vyžaduje čas 2.5 - označme si úlohy 0-4 a vykonávajme úlohy nasledovne - 02, 03, 13, 14, 24. Za 5 jednotiek času splníme všetky úlohy 2x, t.j. naša rýchlosť je 2.5 jednotiek času na splnenie všetkých úloh.

LP - príklady

Chceme nakúpiť el. energiu. El. energia sa nakupuje po hodinách, buď každá hodina samostatne, alebo v balíkoch (napr. pracovné dni od 8:00 do 16:00). Každá hodina a každý balík má svoju jednotkovú cenu. Ako nakúpiť energiu čo najlacnejšie?

- Premenné reprezentujú pre každý produkt (hodinu, balíček hodín) množstvo nakúpeného produktu.
- V každej hodine musíme nakúpiť správne množstvo energie.
- Nemôžeme nakúpiť záporné množstvo produktu.
- Hľadáme minimálnu cenu

LP - exponenciálny počet obmedzení

Z mnohých kombinatorických problémov dostávame prirodzene lineárny program s exponenciálne veľa obmedzeniami. Toto, na počudovanie, nemusí vadiť, špecializované algoritmy si s takouto situáciou vedia poradiť.

LP - exponenciálny počet obmedzení

Príklad: Najlacnejšie perfektné párenie vrcholov v grafe

- Premenná pre každú hranu x_e .
- Súčet vo vrchole 1.
- Súčet na každom nepárnom reze je aspoň 1 (nepárnych rezov je exponenciálne veľa).
- Minimalizujeme $\sum c_e x_e$, kde c_e je cena hrany e .
- Dá sa dokázať že pre každú cieľovú funkciu (lineárnu) existuje optimálna hodnota premenných ktorá je perfektným párením.
- Napriek exponenciálnemu množstvu obmedzení je takýto problém rozumne riešiteľný (samozrejme, obmedzenia nemôžeme dostať na vstup priamo).

Branch and bound

Prístup k riešeniu výpočtovo ťažkých optimalizačných problémov.
Obsahuje:

- Heuristiku
- Odhad

Cieľom je pomocou heuristiky nájsť dobré riešenie a následne pomocou odhadu ukázať, že mnohé vetvy nie je potrebné prehľadať.

Branch and bound - príklad TSP

Problém obchodného cestujúceho.

- Na vstupe máme graf, ktorého hrany sú ohodnotené kladnými celými číslami - tieto hodnoty budeme považovať za dĺžku hrany.
- Cieľ je nájsť uzavretý sled minimálnej celkovej dĺžky.

Heuristika môže napríklad rozširovať ťah o najkratšie spojnice s nejakým vrcholom.

Branch and bound - príklad TSP

Odhad - použijeme LP relaxáciu TSP. Graf doplníme na kompletný (vzdialenosti jednoducho vypočítame). Zaujímajú nás iba Hamiltonovské kružnice.

- Premenná pre každú hranu.
- Súčet okolo každého vrchola je presne dva.
- Súčet na každom reze je aspoň dva.
- Hodnoty premenných sú medzi 0 a 1.

Ak by hodnoty premenných boli celé čísla, optimalizujeme cez hamiltonovské kružnice.

- LP má exponenciálne veľa obmedzení, problém je však riešiteľný v P.
- Riešenie je dolným odhadom na dĺžku TSP.

Branch and bound - príklad TSP

- Backtrackom rozširujeme optimálnu cestu (pričom medzi viacerymi možnosťami ako pokračovať si vyberáme podľa heuristiky).
- Ak vyberieme vhodnú heuristiku, nájdeme pomerne rýchlo “dost” dobré riešenie.
- Pri každom nasledujúcom vetvení vypočítame dolný odhad na dĺžku TSP.
- Ak tento dolný odhad je horší ako najlepší nájdenny sled, nemusíme danú vetvu prehľadávať.

Celočíselné lineárne programovanie

Lineárne programovanie, kde môžeme navyše požadovať, že premenné sú celočíselné. Ak sú iba niektoré premenné celočíselné, volá sa to mixed integer programming.

LP solvery - algoritmy

- V niektorých prípadoch (napr. maximálny tok s celočíselnými kapacitami, maximálne párovanie) je garantované, že nejaké optimálne riešenie LP je celočíselné.
- Branch and bound.
- Branch and cut - Na základe lineárnej relaxácie možno zmenšiť prehľadávaný priestor.
 - Ak už máme riešenie s cenou r , možno do LP a do ILP pridať dodatočnú podmienku (ktorá je lineárna), že cena je nanajvyšš r .

Celočíselné lineárne programovanie - príklady

- Knapsack
- Dominujúca množina

Vrcholové farbenie

- Pridáme binárnu premenú a_{ij} (celočíselná, $0 \leq x \leq 1$), ktorá pre každú hranu určuje, ktorý vrchol má väčšiu farbu.
- $a_{ij} = 1 - a_{ji}$, $x_i - x_j \geq 1 - 2na_{ij}$ (nerovnosť je v prípade $a_{ij} = 1$ irelevantná).

Celočíselné lineárne programovanie - príklady

Už sme videli príklad na TSP (ten ale bol exponenciálny).

Uvažujme kompletný graf.

- Premenná - x_{ij} sled pokračuje z i do j .
- Do každého vrcholu vchádzame, z každého vychádzame práve raz.
- Premenné počítajúce koľko vrcholov sme už navštívili,
 $t_j \leq t_i + 1 - n(1 - x_{ij})$ (ak $j = 0$, použijeme $t'(0)$ miesto $t(0)$).
- $t_0 = 0$, $t'_0 = n$.

Iné solvery, ktoré používame na riešenie problémov - polynomiálne

Rozšírenia lineárneho programovania:

- Kvadratické programovanie - kvadratická cieľová funkcia
- Semidefinitné programovanie - ako lineárny program ale neznáme musia vytvoriť symetrickú kladne semidefinitnú maticu (dodatočné obmedzenie).
 - Korelačná a kovariančná matica sú kladne semidefinitné,

Iné solvery, ktoré používame na riešenie problémov - nepolynomiálne

- Constraint satisfaction problem.
- Hamiltonovskosť.
- ...

Resources |

- [Wikipedia - Linear programming](#)
- [Wikipedia- Branch and bound](#)