Veta o kompaktnosti
Úvod do matematickej logiky

Robert Lukoťka
lukotka@dcs.fmph.uniba.sk
www.dcs.fmph.uniba.sk/~lukotka

M-255

Veta o kompaktnosti

Vetu si pre jednoduchosť budeme dokazovať za predpokladu, že prvotných formúl je spočítateľne veľa. Platí ale aj vo všeobecnosti. Používame terminológiu podľa skrípt doc. Tomana.

Theorem

Nech P je spočítateľná množina prvotných formúl. Nech T je množina formúl jazyka výrokovej logiky nad množinou prvotných formúl P. Potom T je splniteľná $\Leftrightarrow$ každá konečná podmnožina T je splniteľná.

Dôkaz:

$\Rightarrow$: ľahké.

$\Leftarrow$: Potrebujeme dokázať, že ak je každá konečná podmnožina T splniteľná, potom aj T je splniteľná.

Veta o kompaktnosti - Dôkaz

Formúl jazyka výrokovej logiky nad P je spočítateľne veľa, vieme si ich preto zoradiť do postupnosti $A_1, A_2, A_3, \ldots$
Nech

1. $S_0 = T$
2. $S_{i+1} = S_i \cup \{A_i\}$ ak každá konečná podmnožina $S_i \cup \{A_i\}$ je splniteľná
3. $S_{i+1} = S_i \cup \{\neg A_i\}$ inak

Nech $S = \bigcup_{i>=0} S_i$. Dokážeme, že každá konečná podmnožina S je splniteľná.

Veta o kompaktnosti - Dôkaz

Dokážeme indukciou, že každá konečná podmnožina S_i je splniteľná.

- Báza (Prípad 1): Predpoklad našeho tvrdenia hovorí, že každá konečná podmnožina T $(= S_0)$ je splniteľná
- Indukčný krok A (Prípad 2): Platí z definície S_i.
- Indukčný krok B (Prípad 3): ...

Veta o kompaktnosti - Dôkaz

- Keďže sme v prípade 3, existuje konečná podmnožina R_2 množiny $S_i \cup \{A_i\}$, ktorá nie je splniteľná
- Predpokladajme pre spor, že existuje aj konečná podmnožina R_3 množiny $S_i \cup \{\neg A_i\}$, ktorá nie je splniteľná.
- Z IP $(R_2 - \{A_i\}) \cup (R_3 - \{\neg A_i\})$ je splniteľná.
- Existuje teda ohodnotenie v ktoré spňuje každú formulu z tejto množiny.
- Ak $v(A_i) = 1$, potom dostávame spor z nesplniteľnosťou R_2.
- Ak $v(A_i) = 0$, potom dostávame spor z nesplniteľnosťou R_3.

Veta o kompaktnosti - Dôkaz

Dokážeme, že každá konečná podmnožina S je splniteľná.

- Sporom. Nech R je konečná podmnožina S, ktorá nie je splniteľná.
- Keďže R je konečná existuje i také, že $R \subseteq S_i$, spor.

Veta o kompaktnosti - Dôkaz

- Z definície S, pre každú prvotnú formulu p platí $p \in S$, alebo $\neg p \in S$.
- Zároveň neplatí $p \in S$ a $\neg p \in S$, inak by sme mali podmnožinu dvoch formúl, ktorá nie je splniteľná.

Definujeme ohodnotenie $v(p) = 1 \Leftrightarrow p \in S$. Takto definované ohodnotenie rozšírime na ohodnotenie $\bar{v}$ množiny všetkých formúl.

- Indukciou na dĺžku formuly ľahko dokážeme, že pre ľubovolnú formulu A platí $\bar{v}(A) = 1 \Leftrightarrow A \in S$.
- Tým sme našli ohodnotenie splňujúce S a teda aj T.