Diskrétna matematika

Učebný text k prednáške

Edita Máčajová

1 Výroky

Výrok je tvrdenie ktoré je buď pravdivé alebo nepravdivé (princíp dvojhodnotovosti) – výrok nemôže byť súčasne pravdivý i nepravdivý, ale platí práve jedna z týchto možností. Inak povedané výrok je deklaratívna veta, teda veta, ktorá niečo tvrdí, a nie je iba rozkazom, či otázkou. Výrok má spravidla tvar gramatickej oznamovacej vety. Pravdivostnú hodnotu výroku nemusíme vedieť určiť.

- Príklady výrokov:
  - 2+3=5
  - 3+6=10
  - V roku 2037 pristanú ľudia na Marse.
  - Ak je dnes streda, zajtra bude štvrtok.
- Výrokmi nie sú:
  - otázky
  - rozkazovacie vety
  - oznamovacie vety, pokiaľ im nemožno jednoznačne priradiť pravdivostnú hodnotu (napr. „Táto veta je nepravdivá.“).
- Výroky zvyčajne označujeme písmenami p, q, r.
- Pravdivostná hodnota „pravdivý” sa označuje symbolom 1 (alebo T – true), pravdivostná hodnota „nepravdivý” sa označuje symbolom 0 (alebo F – false).
- hypotézy
  - Výrok, o ktorom si myslíme, že je pravdivý, ale nevieme to dokázať sa nazýva *hypotéza*.
  - Tvrdenie o štyroch farbách bolo dlho hypotézou, teraz vieme, že je to pravdivý výrok.

1.1 Logické spojky

Z výrokov môžeme pomocou logických spojok tvoriť nové, zložitejšie výroky. Postupne rozoberieme základné logické spojky. Tieto sa podľa počtu parametrov delia na unárne (negácia) a binárne (konjunkcia, disjunkcia, implikácia a ekvivalencia).

Negácia

- *Negácia*: popretie skutočnosti, ktorú vyjadruje pôvodný výrok.
- Napríklad, ak máme výrok: „Číslo 5 je väčšie ako číslo 2.“, popretím skutočnosti, ktorú tvrdí je výrok „Nie je pravda, že číslo 5 je väčšie ako číslo 2.“, alebo používame aj slovný obrat „neplatí, že číslo 5 je väčšie ako číslo 2“. Takisto samozrejme môžeme (ak rozumieme tomu, čo hovorí výrok) ho znegovať bez slov, ktoré pred neho predsunieme: „Číslo 5 je menšie alebo rovnaké ako číslo 2“
- Výrok je pravdivý práve vtedy, ak jeho negácia je nepravdivá, je nepravdivý v opačnom prípade
- Ak prvý výrok označíme p, tak jeho negáciu budeme označovať $\neg p$. V literatúre sa používa aj p' alebo $\overline{p}$.
- Negácia je unárna spojka (to znamená, že má jeden parameter, v tomto prípade výrok).

p	$\neg p$
0	1
1	0

Tabuľka 1: Pravdivostné hodnoty pri negácii výroku

Konjunkcia

- *Konjunkcia* výrokov p a q spája výroky p a q do nového výroku „p a q” čítame *p a súčasne* q. Konjunkciu výrokov p a q označujeme $p \wedge q$ (prípadne $p\&q$, p AND q).
- Konjunkcia $p \wedge q$ je pravdivá práve vtedy, ak oba výroky p a q sú pravdivé. V opačnom prípade je konjunkcia $p \wedge q$ nepravdivá.

Disjunkcia

- *Disjunkciu výrokov* p a q zapisujeme výrazom $p \vee q$ (prípadne p OR q). Disjunkciu výrokov p a q čítame „p alebo q”.
- Disjunkcia výrokov p a q je pravdivá práve vtedy, ak aspoň jeden z výrokov p a q je pravdivý, v opačnom prípade je disjunkcia výrokov p a q nepravdivá.
- V reálnom živote niekedy používame slovo „alebo” vo vylučovacom význame. Napríklad vo vete „Pôjdeš nakúpiť ty alebo ja.” implicitne myslíme, že pôjde práve jeden z nás, nie obaja. V matematike je pri disjunkcii prípustné aj že sú splnené oba výroky.

Implikácia

- *Implikácia výrokov* p a q sa zapisuje výrazom $p \Rightarrow q$ a číta sa nasledovne: „ak (platí výrok) p, tak (platí výrok) q“, „z p vyplýva q“ alebo jednoducho „p implikuje q“. Výrok p v implikácii $p \Rightarrow q$ sa nazýva *predpoklad* a výrok q je *uzáver* alebo dôsledok.

- Implikácia je nepravdivá v prípade, keď je pravdivý predpoklad implikácie a nepravdivý jej uzáver. Vo všetkých ostatných prípadoch je implikácia pravdivá.

- Implikácia zohráva dôležitú úlohu v matematických dôkazoch.

Ekvivalencia

- Ekvivalenciu výrokov p a q zapisujeme výrazom $p \Leftrightarrow q$ ($p \sim q$, $p \equiv q$) a čítame ako „p je ekvivalentne s q”, „p (plati) prave vtedy keď (platí) q”, „p (platí) vtedy a len vtedy keď (platí) q”. Ekvivalencia p, q platí prave vtedy, keď majú oba výroky p a q rovnakú pravdivostnú hodnotu; t.j. keď sú oba súčasne pravdivé, alebo oba sučasne nepravdivé.

- To, že výroky majú rovnakú pravdivostnú hodnotu, znamená, že jeden z nich može byť napríklad v nejakom zloženom výroku nahradený druhým bez toho, aby sa pravdivostná hodnota zloženého výroku zmenila.

- Ekvivalencia výrokov má význam pri úpravach výrokov. Napríklad pri zisťovaní pravdivostnej hodnoty nejakého veľmi zložitého výroku možeme postupne nahradzovať výroky z ktorých pozostáva, ekvivalentnými jednoduchšími výrokmi, až sa nakoniec dostaneme k výroku, ktorého pravdivostnú hodnotu vieme určiť.

- To, že sú nejake dva výroky logicky ekvivalentné, nemusí znamenať, že majú rovnaký (semantický) význam. Napríklad výroky 26. septembra 2024 bol štvrtok a $5 > 3$ sú oba pravdivé, a teda sú to ekvivalentné výroky.

p	q	$p\wedge$ q	p $\vee$ q	p $\Rightarrow$ q	p $\Leftrightarrow$ q
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Tabuľka 2: Pravdivostné hodnoty výrokov pri použití binárnych spojok (spojok, ktoré spájajú dva výroky)

Špeciálne typy výrokov

- Výrok sa nazýva *tautológiou*, ak je pravdivý pre všetky možné kombinácie pravdivostných hodnôt výrokov, z ktorých je zložený (základných výrokov).

- Výrok sa nazýva *kontradikcia*, ak je nepravdivý pre všetky možné kombinácie pravdivostných hodnôt výrokov, z ktorých je zložený.

- Výrok je *splniteľný*, ak je pravdivý pre aspoň jednu kombináciu pravdivostných hodnôt výrokov, z ktorých je zložený.
- Každý výrok je teda buď splniteľný alebo kontradikcia (ale nie oboje zároveň).

Významné tautológie

- $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$, $(p \vee p) \Leftrightarrow p$ (idempotentosť)
- $(p \wedge r) \Leftrightarrow (r \wedge p)$, $(p \vee r) \Leftrightarrow (r \vee p)$ (komutatívnosť)
- $(p \wedge (r \wedge s)) \Leftrightarrow ((p \wedge r) \wedge s)$, $(p \vee (r \vee s)) \Leftrightarrow ((p \vee r) \vee s)$ (asociatívnosť)
- $(p \wedge (r \vee s)) \Leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (p \wedge s))$, $(p \vee (r \wedge s)) \Leftrightarrow ((p \vee r) \wedge (p \vee s))$ (distributívne zákony)
- $(p \wedge (r \vee p)) \Leftrightarrow p$, $(p \vee (r \wedge p)) \Leftrightarrow p$ (absorpčné zákony)
- $(\neg\neg p) \Leftrightarrow p$ (zákon dvojitej negácie)
- $(p \vee \neg p) \Leftrightarrow 1$ (zákon o vylúčení tretieho)
- $(p \wedge \neg p) \Leftrightarrow 0$ (zákon o vylúčení sporu)
- $\neg(p \wedge r) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg r)$, $\neg(p \vee r) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg r)$ (De Morganove zákony)
- $(\neg p \Rightarrow \neg r) \Leftrightarrow (r \Rightarrow p)$ (kontrapozícia implikácie)
- $(p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (\neg p \vee r)$

Všetky tieto tautológie sa dajú dokázať tabuľkou pravdivostných hodnôt.

♣ Vyjadrite implikáciu a negáciu implikácie pomocou iných logických spojok, pričom negované môžu byt iba základné výroky.

♣ Je implikácia asociatívna?

2 Výrokové formy

*V*ýroková forma je formula, ktorá má tvar výroku, ale výrokom nie je, pretože namiesto tvrdenia o nejakom objekte či objektoch tvrdí niečo o nejakej neznámej veličine (napr. premennej x) a pravdivostnú hodnotu tohto tvrdenia nie je možné bez znalosti hodnoty premennej určiť. Ak však za premennú dosadíme vhodný objekt, alebo inak konkretizujeme množinu hodnôt, ktoré môže premenná nadobúdať, dostávame výrok.

Príklady výrokových foriem

- x je prvočíslo
- $x + 3 > 5$

Pre každú výrokovú formu existuje množina objektov, ktoré má zmysel do výrokovej formy dosadzovať. Túto množina voláme *doména* a je často označovaná M.

Príklad. Nech výrokovú formu máme na množine prirodzených čísiel definovanú takto $a(x) \Leftrightarrow a > 3$.
dosadzovaním do výrokovej formy dostávame výroky:
$a(1) \Leftrightarrow 1 > 3$
$a(2) \Leftrightarrow 2 > 3$
$a(3) \Leftrightarrow 3 > 3$
$a(4) \Leftrightarrow 4 > 3$
$a(5) \Leftrightarrow 5 > 3$ ■

Z výrokovej formy môžeme dostať výrok nielen dosadením konkétnych objektov, ale aj tým, že určíme (kvantifikujeme) pre aké množstvo prvkov množiny M predstavuje výroková forma pravdivý výrok.

- *Existenčný kvantifikátor* $\exists$ čítame „existuje“. Zápis $(\exists x)a(x)$ má význam existuje aspoň jedno také x (z množiny M), pre ktoré platí $a(x)$.
- *Všeobecný kvantifikátor* $\forall$ čítame „pre všetky“. Zápis $(\forall x)a(x)$ má význam pre všetky x (z množiny M), ktoré platí $a(x)$.
- Výroky, ktoré obsahujú kvantifikátory sa nazývajú *kvantifikované výroky*.

Nech $a(x)$ je výroková forma s doménou M.

- výrok $(\forall x)a(x)$ formálne zapíšeme $(\forall x)((x \in M) \Rightarrow a(x))$
- výrok $(\exists x)a(x)$ formálne zapíšeme $(\exists x)((x \in M) \wedge a(x))$
- ak je jasné o akú doménu ide, spravidla používame skrátené zápisy výrokov

♣ Nájdite výrokovú formu $a(x)$ a domény M_1 a M_2 také, že $(\forall x)a(x)$ je pravdivé na M_1, ale nie je pravdivé na M_2. Podobne pre $(\exists x)a(x)$.

♣ Ako sa správajú existenčný a všeobecný kvantifikátor, ak je doména prázdna množina?

2.1 Negácie kvantifikovaných výrokov

Kvantifikované výroky negujeme nasledovne:

- $\neg(\forall x)(a(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg a(x))$,
- $\neg(\exists x)(a(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg a(x))$.

3 Typy dôkazov

Jedna z najčastejších úloh v matematike je dokázať platnosť nejakého tvrdenia (s použitím istých predpokladov). Typov dôkazov je niekoľko, tu spomenieme najčastejsie používané: priamy a nepriamy dôkaz, dôkaz sporom a dôkaz matematickou indukciou. Často sa typy dôkazov kombinujú, napríklad vnútri dôkazu matematickou indukciou sa dokáže čiastkové tvrdenie priamym dôkazom.

Pri dôkazoch sa stretnete so slovným zvratom „bez ujmy na všeobecnosti". Myslí sa tým, že z viacerých prípadov, ktoré treba rozobrať stačí rozobrať jeden, lebo ostatné prípady by sa robili obdobne.

3.1 Priamy dôkaz

Majme matematické tvrdenie B, ktoré chceme dokázať. Pri priamom dôkaze postupujeme tak, že prijmeme nejaké predpoklady, označíme ich A a dokážeme reťaz implikácii

$$A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \ldots \Rightarrow A_n \Rightarrow B$$

pre nejaké výroky $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Túto reťaz implikácií treba chápať ako skrátený zápis, že

$$\begin{array}{rcl} A & \Rightarrow & A_1 \text{ a zároveň} \\ A_1 & \Rightarrow & A_2 \text{ a zároveň} \\ & \ldots & \\ A_{n-1} & \Rightarrow & A_n \text{ a zároveň} \\ A_n & \Rightarrow & B. \end{array}$$

Priamy dôkaz často pouzívame na dôkaz implikácie $L \Rightarrow R$, kde za A položíme L a za B položíme R.

Príklad. Dokážte, že pre všetky prirodzené čisla n platí: ak 3 delí n, tak 9 delí n^3.
Riešenie. Pre každé prirodzené číslo n platia nasledujúce implikácie:
3 delí $n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = 3.k \Rightarrow n^3 = (3k)^3 \Rightarrow n^3 = 27k^3 \Rightarrow$ 9 delí n^3. Dostávame teda, že 3 delí $n \Rightarrow$ 9 delí n^3, čo bolo treba dokázať. ∎

Pri priamom dôkaze sa môže stať, že sa dôkaz delí na podprípady, napr. namiesto $A_i \Rightarrow A_{i+1}$ nahliadneme $A_i \Rightarrow (A^1_{i+1} \vee A^2_{i+1} \vee \ldots \vee A^k_{i+1})$. Potom treba z každého z výrokov A^1_{i+1}, $A^2_{i+1} \ldots A^k_{i+1}$ dokázať B.

Príklad. Šesť družstiev sa zúčastnilo turnaja, ktorý sa hral systémom každý s každým jeden zápas. Turnaj trval dva dni. Dokážte, že existujú tri družstvá, ktoré odohrali všetky tri svoje vzájomné zápasy počas jedneho dňa.
Riešenie. Označme si družstvá A, B, C, D, E, F. Družstvo A odohralo päť zápasov. Z dirichletovho princípu vyplýva, že v jeden z dní odohralo družstvo A aspoň tri zápasy, označme tento deň X a ten iný deň označme Y. Predpokladáme teda, že v deň X odohralo družstvo A aspoň tri zápasy. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že v deň X družstvo A odhralo zápasy s družstvami B, C, D (mohlo aj s viacerými, vyberieme si tri z družstiev). Tu sa dôkaz rozdeľuje na dve možnosti:
1. možnosť: niektorý zo zápasov medzi B-C, B-D alebo C-D sa odohral v deň X.
2. možnosť: všetky zápasy medzi B-C, B-D a C-D sa odohrali v deň Y.

Ak nastala možnosť 1, tak dve družstva z B, C, D, ktoré hrali spolu v deň X, tvoria spolu s družstvom A trojicu družstiev, ktoré všetky tri svoje vzájomné zápasy odohrali v deň X. Ak nastala možnosť 2, tak družstvá B, C, D odohrali všetky tri svoje vzájomné zápasy v deň Y.

Nahliadli sme, že bez ohľadu na to, ktorá z dvoch možností nastala, existuje trojica družstiev s požadovanou vlastnosťou. Keďže tieto dve možnosti pokrývajú všetky možné prípady, dôkaz je ukončený. ■

3.2 Nepriamy dôkaz implikácie pomocou obmeny

Tento typ dôkazu je založený na skutočnosti, že implikácia $a \Rightarrow b$ a jej obmena $\neg b \Rightarrow \neg a$ sú ekvivalentné. Ak je to teda výhodnejšie, namiesto implikácie $a \Rightarrow b$ môžeme dokazovať implikáciu $\neg b \Rightarrow \neg a$.

Príklad. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla platí: ak 25 nedelí n^2, potom 5 nedelí n.
Riešenie. Máme dokázať, že 25 nedelí $n^2 \Rightarrow$ 5 nedelí n. Namiesto tejto implikácie budeme dokazovať ekvivalentnú implikáciu 5 delí $n \Rightarrow$ 25 delí n^2. Tu už budeme postupovať, ako pri priamom dôkaze.
5 delí $n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = 5.k \Rightarrow n^2 = (5k)^2 \Rightarrow n^2 = 25k^2 \Rightarrow$ 25 delí k^2. Týmto sme dokázali obmenu pôvodnej implikácie, a teda aj pôvodnú implikáciu. ■

3.3 Dôkaz sporom

Predpokladajme, že chceme dokázať tvrdenie A. V dôkaze sporom z negácie tvrdenia A odvodíme nepravdivé tvrdenie. Čiže ukážeme, že $\neg A \Rightarrow 0$, čo je ekvivalentné s $1 \Rightarrow A$ a toto je ekvivalentné s A.

Príklad. Dokážte, že $\sqrt{2}$ je iracionálne číslo.
Riešenie. Predpokladajme pre spor, že $\sqrt{2}$ je racionálne číslo, čiže sa dá zapísať v tvare p/q, kde p a q sú prirodzené čísla. Navyše môžme predpokladať, že p a q sú nesúdeliteľné.

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$$

Z poslednej rovnosti vyplýva, že $2|p^2$, čo ďalej implikuje $2|p$. Teda $p = 2k$ pre niektoré prirozdené číslo k. Dosadíme toto do $2q^2 = p^2$ a po úprave dostávame, že $2|q^2$, a teda $2|q$. Čísla p a q majú spoločného deliteľa 2, čo je v spore s tým, že sú nesúdeliteľné. ■

3.4 Dôkaz matematickou indukciou

Dôkaz matematickou indukciou používame obyčajne na dokázanie pravdivosti výrokovej formy pre nekonečne veľa hodnôt. Vysvetlíme si tento dôkaz na prirodzených číslach a v závere podsekcie uvedieme niektoré zovšeobecnenia. Majme teda výrokovú formu $V(n)$ a chceme dokázať pravdivosť výroku $V(n)$ pre všetky prirodzené čísla n. Dôkaz urobíme v dvoch krokoch:
1. krok, tiež nazývaný *bázový krok*, alebo aj *báza* indukcie. Tu overíme pravdivosť výroku $V(0)$.
2. krok, tiež nazývaný *indukčný krok.* V tomto kroku overíme pravdivosť výroku

$$(\forall n \in \mathbb{N})(V(n) \Rightarrow V(n+1)).$$

Pri dôkaze indukčného kroku hovoríme výroku $V(n)$ *indukčný predpoklad.*

Príklad. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla platí

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Riešenie. Najprv overíme bázu indukcie, to znamená overíme pravdivosť výroku $V(0)$. Čiže máme overiť, že $0.1 = \frac{0.1.2}{3}$. Tento výrok je zjavne pravdivý. Pristúpme teraz k druhému kroku, ukážme, že $(\forall n \in \mathbb{N})(V(n) \Rightarrow V(n+1))$. Čiže predpokladajme, že platí

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \qquad (*)$$

a dokážeme, že platí

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) + (n+1) \cdot (n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.$$

Začneme ľavou stranou a postupnosťou rovností ukážeme, že sa rovná pravej strane. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) + (n+1) \cdot (n+2) \overset{(1)}{=} \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$.

Pričom rovnosť (1) vyplýva z indukčného predpokladu (*) aplikovaného na všetky ščítance okrem posledného. Tým je dôkaz ukončený. ■

Ako sme uviedli, používajú sa rôzne modifikácie dôkazu matematickou indukciou. Tu uvedieme niektoré.

- Výrok je platný (a preto ho dokazujeme) až od istého prirodzeného čísla k. Vtedy v bázovom kroku dokazujeme výrok $V(k)$ a v indukčnom kroku výrok $(\forall n \in \mathbb{N})[(n \geq k) \Rightarrow (V(n) \Rightarrow V(n+1))]$.
- Máme dokázať výrok $V(n)$ pre všetky prirodzené čísla, ale jedným dôkazom matematickou indukciou to nevieme spraviť. Rozdelíme si množinu na viac podmnožín a dokážeme platnosť výroku pre tieto podmnožiny osobitne. Napr. rozdelíme si prirodzené čísla na párne a nepárne a ukážeme, že
  - $V(0)$ a $V(n) \Rightarrow V(n+2)$ pre všetky párne prirodzené čísla n, a zároveň
  - $V(1)$ a $V(n) \Rightarrow V(n+2)$ pre všetky nepárne prirodzené čísla n.
- V indukčnom kroku využívame ako predpoklad platnosť tvrdenia pre všetky menšie čísla, t.j. dokazujeme $[V(0) \wedge V(1) \wedge \ldots \wedge V(n)] \Rightarrow V(n+1)$.
- Ak je indukčný krok platný len pre $n \geq k$ pre nejaké prirodzené číslo k, tak v bázovom kroku overíme platnosť tvrdení $V(0), V(1), \ldots, V(k)$.
- Dokazujeme na inej množine, ako na prirodzených číslach. Množina nemusí byť lineárne usporiadaná, môžu existovať dvojice neporovnateľných prvkov. O takýchto množinách sa dozviete na tomto predmete neskôr.

♣ Nájdite chybu v „dôkaze“ nasledujúceho tvrdenia. Všetky kone majú rovnakú farbu.
„Dôkaz.“ Matematickou indukciu dokážeme pre prirodzené $k \geq 1$ tvrdenie: každá k-prvková množina koní obsahuje všetky kone rovnakej farby.
V báze indukcie treba overiť, že každá jednoprvková množina koní má všetky kone rovnakej farby. Toto je zjavne pravda, keďže kôň je množine len jediný. Pre dôkaz indukčného kroku predpokladajme, že tvrdenie platí pre nejaké prirodzené k a dokážeme tvrdenie pre $k+1$. Majme teda nejakú množinu $k+1$ koní. Kone si v nej očíslujme $1, 2, \dots, k+1$. Pozrime sa na množinu koní tvorenú koňmi s číslami $1, 2, \dots, k$. Podľa indukčného predpokladu majú všetky kone v tejto množine rovnakú farbu. Takisto v množine koní s číslami $2, 3, \dots, k+1$ majú všetky kone podľa indukčného predpokladu rovnakú farbu. Keďže kôň s číslom k je v oboch množinách, farby koní v oboch množinách sú rovnaké a dostávame, že všetky kone z pôvodnej $(k+1)$-prvkovej množiny majú rovnakú farbu. Tým sme ukončili indukčný krok, a teda dokázali, že všetky kone sú rovnakej farby.

4 Množiny

Množina je súbor objektov, ktoré sa neopakujú. V množine sú objekty neusporiadané. Objekty, ktoré sú v množine nazývame *prvky*. Prvkom množiny môže byť množina.

- Fakt, že prvok x patrí množine A zapisujeme $x \in A$.
- Ak A je konečná množina, tak symbolom $|A|$ označujeme počet jej prvkov.
- Ak množina nemá žiadne prvky, voláme ju *prázdna* a označujeme ju $\emptyset$ alebo $\{\}$.
- Symbolom U budeme označovať *univerzálnu množinu*, teda množinu, ktorá obsahuje všetky prípustné prvky.
- Dve množiny A a B *sa rovnajú* ak majú rovnaké prvky. To znamená, že $A = B$ práve vtedy, keď $(\forall x \in U)(x \in A \iff x \in B)$.
- Množina A je *podmožinou* množiny B (zapisujeme $A \subseteq B$) ak každý prvok, čo patrí do A patrí aj do B, t.j. $(A \subseteq B) \iff (\forall x)[(x \in A) \implies (x \in B)$. Množina A je *vlastnou podmnožinou* množiny B ak A je podmnožinou B a existuje prvok množiny B, ktorý nepatrí množine A. Ak chceme zdôrazniť, že množina A je vlastnou podmnožinou množiny B, môžeme použiť symbol $\subsetneq$.
- *Potenčná množina* množiny A je množina všetkých podmnožín množiny A, označujeme ju $\mathcal{P}(A)$. Čiže $\mathcal{P}(A) = \{X; X \subseteq A\}$. Napríklad $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

4.1 Množinové operácie

Nech A a B sú množiny. Definujeme nasledujúce operácie

- **zjednotenie** $A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$
- **prienik** $A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$

- **rozdiel** $A \setminus B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$
- **komplement** $A^C = \{x; x \in U \wedge x \notin A\}$. Komplement robíme vzhľadom na univerzálnu množinu U, v ktorej pracujeme.
- **karteziánsky súčin** $A \times B = \{(a,b); a \in A \wedge b \in B\}$

Alternatívne môžeme rozdiel $A \setminus B$ vyjadrit ako $A \cap B^C$.

- Symbolom (a,b) označujeme usporiadanú dvojicu definovanú ako $\{a, \{a,b\}\}$.

O množinách A a B povieme, že sú *disjunktné*, ak majú prázdny prienik, t.j. ak $A \cap B = \emptyset$. Množiny $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sú *po dvoch disjunkné*, ak $A_i \cap A_j = \emptyset$ pre všetky $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ také, že $i \neq j$.

4.2 Množinové identity

Veta 4.1. *Nech A, B a D sú množiny. Potom platí*

(1) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ *(idempotentnosť),*

(2) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ *(komutatívnosť),*

(3) $A \cup (B \cup D) = (A \cup B) \cup D$, $A \cap (B \cap D) = (A \cap B) \cap D$ *(asociatívnosť),*

(4) $A \cap (B \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap D)$, $A \cup (B \cap D) = (A \cup B) \cap (A \cup D)$ *(distributívnosť),*

(5) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$, $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ *(de Morganove zákony).*

Dôkaz. Dokážeme bod (2). Dôkazy ostatných bodov sú podobné – odvoláme sa na vlastnosti logických spojok.
$x \in (A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B) \Leftrightarrow (x \in B) \vee (x \in A) \Leftrightarrow x \in (B \cup A)$ □

5 Pravidlo súčtu

Veta 5.1 (Pravidlo súčtu)**.** *Nech $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \geq 2$ sú po dvoch disjunktné konečné množiny. Potom platí*

$$|X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n| = |X_1| + |X_2| + \cdots + |X_n|.$$

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou. Bázu indukcie bude predstavovať tvrdenie pre dve množiny. Pre $n = 2$ tvrdenie hovorí $|X_1 \cup X_2| = |X_1| + |X_2|$ a je zrejmé, keďže X_1 a X_2 sú disjunktné.

Predpokladajme teraz, že tvrdenie platí pre nejaké $n \geq 2$ a dokážeme, že platí pre $n + 1$.

$$|X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_{n+1}| = |(X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n) \cup X_{n+1}| =$$
$$= |(X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n)| + |X_{n+1}| = |X_1| + |X_2| + \cdots + |X_{n+1}|.$$

V druhej rovnosti sme využili tvrdenie pre $n = 2$ a v poslednej rovnosti sme využili indukcný predpoklad – tvrdenie pre n. □

6 Dirichletov princíp

Aj keď samotný princíp je jednoduchý jeho aplikácia môže byť komplikovaná. Je to jeden z najčastejšie používaných prinípov pri dokazovaní matematických tvrdení.

Najjednoduchšia forma:
Ak $n+1$ predmetov vkladáme do n priečinkov, tak aspoň jeden priečinok bude obsahovať dva alebo viac predmetov.

- Dirichletov princíp je niekedy nazývaný aj *holubníkový princíp*.

Množiny $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tvoria *rozklad* množiny B ak

1. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = B$
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pre všetky $i \neq j$ a $i, j \in \{1, 2, \ldots n\}$
3. $A_i \neq \emptyset$ pre všetky $i \in \{1, 2, \ldots n\}$

Príklad.

- $\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}$ je rozklad množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\{2\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}$ nie je rozklad množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}$ nie je rozklad množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

■

Množiny $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tvoria *slabý rozklad* množiny B, ak

1. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n = B$
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pre všetky $i \neq j$ a $i, j \in \{1, 2, \ldots n\}$

Príklad.

- $\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}$ je slabý rozklad množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

■

Veta 6.1 (Dirichletov princíp)**.** *Nech B je množina, $|B| = m$ a $A_1, A_2, \ldots, A_n$ je slabý rozklad množiny B. Ak $m > n$, tak existuje $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ také, že $|A_i| \geq 2$.*

Dôkaz. Sporom predpokladajme, že $|A_i| \leq 1$ pre všetky $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Potom $|B| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| \leq n$. Dostávame spor s predpokladom, že $|B| = m > n$. □

- Dirichletov princíp je nekonštruktívny princíp, čiže hľadaný objekt pomocou neho priamo nenájdeme, ale dokážeme jeho existenciu.

Príklad. Na istej škole je 500 študentov. Nahliadnite, že existujú dvaja študenti, ktorí majú rovnaký deň aj mesiac narodenia.

Riešenie. Nech S je množina študentov danej školy. Rozdeľme študentov do množín $M_1, M_2, \ldots M_{366}$ podľa dňa a mesiaca narodenia. Keďže $|S| > 366$ existujú dvaja študenti s rovnakým dňom a mesiacom narodenia. ■

Príklad. Dokážte, že v postupnosti $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ľubovoľných n prirodzených čísiel existuje súvislá podpostupnosť $(a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_m)$ taká, že súčet $a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_m$ je deliteľný číslom n.

Riešenie. Uvažujme n súčtov

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

...

$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Ak je niektorý medzi nimi deliteľný n, máme hľadaný súčet. Predpokladajme preto, že žiaden zo súčtov nie je deliteľný n, t.j. po delení n dáva niektorý zo zvyškov $1, 2, \ldots, n-1$. Keďže súčtov je n a možných zvyškov je $n-1$, existujú dva súčty s rovnakým zvyškom, nech sú to s_p a s_q. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $p < q$.

- $a_1 + a_2 + \ldots + a_p = bn + z$
  $a_1 + a_2 + \ldots + a_q = cn + z$
- $a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots a_q = cn + z - (bn + z) = (c - b)n$
- tento súčet je deliteľný n

■

6.1 Zosilnená forma Dirichletovho princípu

Táto forma dáva postačujú podmienku na to, aby v aspoň jednej z množín slabého rozkladu bolo aspoň k prvkov.

♣ Rozmyslite si, koľko študentov musí mať škola, aby bolo isté, že aspoň piati študenti majú rovnaký deň a mesiac narodenia.

Veta 6.2. *Nech B je množina, $|B| = m$ a $A_1, A_2, \ldots A_n$ je slabý rozklad množiny B. Ak $m/n > r$, tak existuje $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ také, že $|A_i| \geq r + 1$.*

Dôkaz. Sporom predpokladajme, že pre všetky $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí, že $|A_i| <= r$. Potom $m = |B| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| \leq n.r$, čo je v spore s $m/n > r$. □

Príklad. Pri riešení príkladov, ktoré sa dajú riešiť dirichletovým princípom sa často stretávame s istým druhom chyby. Uvádzame tu preto príklad a najprv jeho chybné a následne správne riešenie.

Zadanie. Aké je najmenšie číslo k také, že keď vyberieme ľubovoľných k čísiel z množiny $\{1, 2, \ldots, 100\}$, tak medzi vybratými číslami určite bude dvojica čísiel, ktoré sa líšia o 1?

Chybné riešenie. Číslo k musí byť aspoň 51, lebo keby sme vybrali všetky párne čísla z $\{1, 2, \ldots, 100\}$ žiadne dve z nich by sa nelíšili práve o 1.

Vyberme teda všetkých 50 párnych čísiel, vidíme, že keď pridáme ľubovoľné ďalšie číslo, bude vo vybraných 51 číslach dvojica s rozdielom 1.

Prečo je uvedené riešnie chybné a kde je chyba? Prvá čast riešenia je v poriadku, čísiel musí byť aspoň 51, zdôvodnenie je správne. Problém je v druhej časti: tam ak vyberieme najprv všetky párne čísla a následne pridáme jedno, naozaj budeme mat vo výbere dve čísla s rozdielom 1. Problém je však v tom, že my máme nahliadnuť, že *všetky* výbery 51 čísiel obsahuju dve čísla s rozdielom 1 a týmto spôsobom sme uvazovali iba výbery čísiel, ktoré obsahovali 50 párnych a jedno nepárne číslo a nie iné kombinície.

Riešenie. Prvá časť riešenia, poskytujúca dolný odhad 51 je v poriadku (a treba ju!), vybratých čísiel musí byť aspoň 51. Dokážme, že 51 stačí. Rozdeľme čísla $1, 2, \ldots, 100$ do 50 množín – položme $A_i = \{2i - 1, 2i\}$ pre $i \in \{1, 2, \ldots, 50\}$. Systém množín $A_1, A_2, \ldots, A_{50}$ tvorí rozklad množiny $\{1, 2, \ldots, 100\}$. Keďže $51 > 50$, v ľubovoľnom výbere 51 čísiel bude existovať množina A_j pre nejaké $j \in \{1, 2, \ldots, 50\}$, ktorá bude obsahovať dve z vybraných čísiel. Čísla v množine A_j majú rozdiel 1.

Poznamenávame, že týmto sme dokazali o niečo silnejšie tvrdenie – dokázali sme, že keď vyberieme 51 čísiel, tak vo výbere budú dve čísla s rozdielom 1, pričom menšie z nich bude nepárne a väčšie párne.

■

7 Pravidlo súčinu

Použitím pravidla súčtu dokážeme zložitejšie pravidlo súčinu. Usporiadanú n-ticu budeme zapisovať nasledujúcim spôsobom.

- $x \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \Leftrightarrow (\exists a_1)(\exists a_2) \ldots (\exists a_n) : (a_1 \in A_1) \wedge (a_2 \in A_2) \wedge \ldots \wedge (a_n \in A_n) \wedge x = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Veta 7.1 (Pravidlo súčinu)**.** *Nech $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \geq 1$ sú ľubovoľné konečné množiny. Potom $|X_1 \times X_2 \times \cdots X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \cdots \cdot |X_n|$.*

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou. Za bázu zoberieme $n = 1$; tu tvrdenie zjavne platí. Pristúpme teraz k indukčnému kroku. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre nejaké $n \geq 1$ a dokážeme, že platí pre $n + 1$.

- Chceme zistiť počet prvkov množiny $X_1 \times X_2 \times \cdots X_n \times X_{n+1}$.
- Ak $X_{n+1} = \emptyset$, tak $|X_1 \times X_2 \times \cdots X_n \times X_{n+1}| = 0 = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \cdots \cdot |X_n| \cdot |X_{n+1}|$, teda tvrdenie v tomto prípade platí.
- Predpokladajme, teraz, že $|X_{n+1}| = s \geq 1$ a nech $X_{n+1} = \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$. Položme pre každé $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$

$$Y_i = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times \{a_i\}.$$

- Platí $|Y_i| = |X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n|$.
- Podľa indukčného predpokladu $|Y_i| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \cdots \cdot |X_n|$.

- Platí $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n+1} = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_s$.
- Platí $|X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n+1}| = |Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_s| = |Y_1| + |Y_2| + \cdots + |Y_s| = s \cdot |X_1| \cdot |X_2| \cdot \cdots \cdot |X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \cdots \cdot |X_n| \cdot |X_{n+1}|$.

□

8 Variácie

8.1 Variácie s opakovaním

Variacie s opakovaním k-tej triedy z n prvkov množiny M sú ako usporiadané k-tice pozostávajúce z prvkov množiny M. Ich počet označujeme $V'_k(n)$.

- Podľa pravidla súčinu počet variácie s opakovaním k-tej triedy z n prvkov množiny M je $|\underbrace{M \times M \times \cdots \times M}_{k \text{ krát}}| = \underbrace{|M|.|M| \ldots |M|}_{k \text{ krát}} = |M|^k = n^k$.

Príklad. Koľkými spôsobmi možno zvoliť kód od trezoru, ak kód sa skladá zo štyroch cifier $\{0, 1, \ldots, 9\}$?
Riešenie. Každý kód zodpovedá usporiadanej 4-ici z desiatich cifier $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Preto možných kódov je $10^4 = 10000$. ■

8.2 Variácie bez opakovania a permutácie

Veta 8.1 (Zovšeobecnené pravidlo súčinu)**.** *Nech M je konečná množina. Nech $A \subseteq M^k$ je podmnožina karteziánskeho súčinu M^k, ktorej každý prvok $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ spĺňa podmienky:*
(i) *prvok a_1 možno z množiny M vybrať n_1 spôsobmi a*
(ii) *pre každé $i \in \{2, 3, \ldots k\}$, po akomkoľvek výbere usporiadanej $(i-1)$-tice $(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1})$ je možné prvok a_i vybrať vždy n_i spôsobmi.*

Potom $|A| = n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k$.

Dôkaz. Nie je ťažké urobiť indukciou vzhľadom na k. □

Variacie bez opakovania k-tej triedy z n prvkov množiny M sú usporiadané k-tice pozostávajúce z prvkov množiny M, pričom prvky sa neopakujú. Počet variácií bez opakovania k-tej triedy z n prvkov označujeme $V_k(n)$.

- Podľa zovšeobecneného pravidla súčinu počet variácií bez opakovania k-tej triedy z n prvkov množiny M je $|M|.(|M| - 1) \ldots (|M| - k + 1) = n.(n - 1) \ldots (n - k + 1)$. Všimnite si, že tento vzťah platí aj ak $n < k$ – jeden z činiteľov bude 0.
- Súčin $n(n - 1) \ldots .(n - k + 1)$ zapisujeme aj ako $\prod_{i=0}^{k-1}(n - i)$ a tiež ako $n^{\underline{k}}$ a čítame ako *k-ta klesajúca mocnina z n.*

Príklad. Pretekov v orientačnom behu sa zúčastnilo 100 bežcov. Koľkými spôsobmi sa mohli umiestniť na stupňoch víťazov?

Riešenie. Potrebujeme zostaviť usporiadanú trojicu, pričom jej prvky vyberáme zo 100 prvkovej množiny a prvky sa neopakujú. Ide teda o variácie s opakovaním 3. triedy zo 100 prvkov a je $100.99.98 = 100^{\underline{3}}$ možností ako sa mohli umiestniť pretekári na stupňoch vítazov. ∎

- ak $k = n$ tak variácie bez opakovania k-tej triedy z n prvkov voláme *permutácie.* Ich počet je $n(n-1)\dots 1$. Tento súčin označujeme $n!$ a čítame „n-faktoriál". Platí $0! = 1$.

9 Kombinácie bez opakovania

- *Kombinácie bez opakovania* k-tej triedy z n prvkov množiny M sú k-prvkové podmnožiny množiny M.
- Počet kombinácií bez opakovania k-tej triedy n prvkov označujeme $C_k(n)$, ale taktiež používame symbol $\binom{n}{k}$, ktorý čítame „n nad k". Tento symbol sa nazýva *kombinačné číslo* alebo aj *binomický koeficient.* Pri kombinačných číslach predpokladáme, že n a k sú prirodzené čísla.
- množinu všetkých k-prvkových podmnožín množiny M označujeme $\binom{M}{k}$ alebo aj $\mathcal{P}_k(M)$

Z definície kombinačného čísla vyplýva pre prirodzené číslo n:

- $\binom{n}{0} = 1$, lebo existuje jedna prázdna podmnožina n-prvkovej množiny
- $\binom{n}{1} = n$, lebo existuje n jednoprvkových podmnožín n-prvkovej množiny
- $\binom{n}{n} = 1$, lebo existuje jedna n-prvková podmnožina n-prvkovej množiny
- $\binom{n}{k} = 0$, pre každe prirodzené číslo $k > n$, lebo neexistuje k-prvková podmnožina n-prvkovej množiny ak $n < k$.
- Ak k je prirodzené číslo a $k \leq n$, potom $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, lebo každú k prvkovú podmonožinu P množiny s n prvkami M možeme jednoznačne určiť jej komplementom $M - P$.

Príklad. Pomocou kombinácií bez opakovanie môžeme vyriešiť otázku, koľko zápasov sa bude hrať medzi n družstvammi, ak sa hrá systémom každý s každým. Tiež, ak máme m ľudí a chcú si každý s každým podať ruku, koľko bude podaní rúk. ∎

Veta 9.1. *Nech M je konečná množina, pričom $|M| = n$ a nech k je prirodzené číslo. Potom počet kombinácií bez opakovania k-tej triedy z n prvkov množiny M je*

$$\binom{n}{k} = |\mathcal{P}_k(M)| = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$$

Dôkaz. Počet kombinácií bez opakovania odvodíme od počtu variácií bez opakovania. Množinu všetkých variácií bez opakovania môžeme rozložiť na disjunktné podmnožiny tak, že variácie v jednej podmnožine sa líšia iba poradím prvkov. Čiže v každej podmnožine bude počet prvkov rovný počtu možností, koľkými sa dá k prvkov usporiadať do postupnosti, teda počtu permutácií k prvkov, t.j. $k!$. Počet variácií bez opakovania je $n^{\underline{k}}$. Preto počet kombinácií bez opakovania je $\frac{n^{\underline{k}}}{k!}$. $\square$

- Podobne ako pri variáciách bez opakovania, predchádzajúca veta platí aj keď $n < k$.
- Ak $n \geq k$, môžeme použiť vzťah $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Veta 9.2. *Pre všetky prirodzené čísla n a k platí*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Dôkaz. Dôkaz urobíme pomocou množinovej interpretácie. Majme množinu M, ktorá má $n+1$ prvkov. Pravá strana rovnosti zodpovedá počtu možných výberov $k+1$-prvkovej podmnožiny z M. Zvoľme si ľubovoľný prvok množiny M, povedzme p. Podmnožiny množiny M, ktoré majú $k+1$ prvkov môžeme rozdeliť do dvoch skupín – tie čo obsahujú prvok p a tie neobsahujú prvok p. Podmnožín množiny M s $k+1$ prvkami, ktoré obsahujú prvok p, je toľko isto, ako k-prvkových podmnožín množiny $M - \{p\}$, čiže je ich $\binom{n}{k}$. Podmnožín množiny M s $k+1$, ktoré neobsahujú prvok p je toľko isto, ako $k+1$-prvkových podmnožín množiny $M - \{p\}$, čiže je ich $\binom{n}{k+1}$. Z toho vyplýva uvedený vzťah. $\square$

Predchádzajúci vzťah je základom Pascalového trojuholíka – usporiadania kombinačných čísel v rovine do tvaru trojuholníka. Pomenovanie má podľa matematika, ktorý žil v 17. storočí Blaise Pascala, ale je oveľa starší. Platí v ňom veľa zaujímavých vzťahov, okrem iného zohráva dôležitú úlohu pri nasledujúcej vete.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Veta 9.3 (Binomická veta)**.** *Pre každé prirodzené číslo n a reálne čísla a a b platí vzťah*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

Dôkaz. Dôkaz urobíme matematickou indukciou vzhľadom na n. Ak $n = 0$, tak aj ľavá aj pravá strana sa rovnajú 1; tým je báza indukcie overená. Pre dôkaz indukčného kroku, predpokladajme, že tvrdenie pre n a dokážeme, že platí aj pre $n+1$. Predpokladáme teda, že platí $(a+b)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$ a chceme dokázať $(a+b)^{n+1} = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i}$. Začneme ľavou stranou a postupnými úpravami sa dostaneme k pravej strane.

$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = a(a+b)^n + b(a+b)^n \overset{2x\mathrm{IP}}{=} a \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} + b \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{i+1} b^{n-i} + \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n+1-i} = \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum\limits_{i=0}^{n-1} \left[\binom{n}{i} a^{i+1} b^{n-i} + \binom{n}{i+1} a^{i+1} b^{n-i}\right] + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 = \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum\limits_{i=0}^{n-1} \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1}\right] a^{i+1} b^{n-i} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 \overset{\text{Veta 9.2}}{=} \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum\limits_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i+1} a^{i+1} b^{n-i} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 = \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 = \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 = \sum\limits_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i}$

Tým je binomická veta dokázaná. □

Dôsledok 9.4. *Platia nasledujúce vzťahy.*

(a) $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$ *pre každé prirodzené číslo* n,

(b) $\sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0$ *pre každé prirodzené číslo* $n \geq 1$,

(c) $\sum\limits_{\substack{0 \leq i \leq n \\ i \text{ je párne}}} \binom{n}{i} = \sum\limits_{\substack{0 \leq i \leq n \\ i \text{ je nepárne}}} \binom{n}{i} = 2^{n-1}$ *pre každé prirodzené číslo* $n \geq 1$.

Dôkaz. Časť (a) dostaneme dosadením čísla 1 za a aj b do binomickej vety. V časti (b) dosadíme do binomickej vety $a = -1$, $b = 1$. Dostaneme $0^n = \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}$. Pre $n \geq 1$ z toho vyplýva dané tvrdenie. Časť (c) dostaneme sčítaním, resp. odčítaním rovností z (a) a (b). □

Tvrdenie 9.5. *Pre všetky prirodzené čísla* n *platí*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Dôkaz. Najprv využijeme symetrickú identitu binomických koeficientov $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-1}$, preto platí $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$. Teraz pomocou kombinatorickej interpretácie nahliadneme, že posledná suma sa rovná $\binom{2n}{n}$. Spočítame dvomi spôsobmi, koľkými spôsobmi môžme vybrať n-prvkovú podmnožinu množiny M. Majme množinu M, ktorá má $2n$ prvkov. Rozdeľme ju ľubovoľne na dve podmnožiny A a B s n prvkami. Keďže vyberáme n-prvkovú podmnožinu $2n$-prvkovej množiny, môžeme to urobiť $\binom{2n}{n}$ spôsobmi. Alternatívne sa na to môžeme pozrieť tak, že vyberáme i-prvkovú podmnožinu množiny A a $n-i$-prvkovú podmnožinu množiny B, teda dokopy n-prvkovú podmnožinu množiny M. Prvú podmnožinu môžeme vybrať $\binom{n}{i}$ a druhú $\binom{n}{n-i}$ spôsobmi. Výbery môžme ľubovoľne kombinovať, čiže kombinácií výberov i-prvkovej podmnožiny z A a $n-i$-prvkovej podmnožiny z B je podľa pravidla súčinu $\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$. Aby sme uvažovali všetky možné n-prvkové podmnožiny množiny M, musíme uvažovať všetky prípustné veľkosti prieniku vyberanej podmnožiny množiny a množiny A. Tieto počty spočítame, preto použijeme sumu s hranicami 0 a n. □

10 Kombinácie s opakovaním

- *Kombinácie s opakovaním* k-tej triedy n prvkov množiny M sú k-prvkové súbory prvkov, v ktorých sú prvky neusporiadané a môžu sa opakovať, inými slovami sú to podmultimnožiny množiny M.
- Počet kombinácií s opakovaním k-tej triedy n prvkov označujeme $C'_k(n)$.

Veta 10.1. *Nech M je konečná množina, pričom $|M| = n$ a nech k je prirodzené číslo. Potom počet kombinácií s opakovaním k-tej triedy z n prvkov množiny M je*

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Dôkaz. Uvedieme tu dva dôkazy, v oboch prevedieme úlohu na počet kombinácií bez opakovania.
1. dôkaz. Potrebujeme vybrať k objektov z n typov, pričom môžeme mať viacero objektov rovnakého typu. Objektom budú zodpovedať guličky – budeme mať k guličiek, zoradíme si ich do radu. Tieto guličky potrebujeme rozdeliť do n typov, to spravíme $n-1$ oddeľovačmi, ktorým budú zodpovedať paličky. Teda medzi k guličiek vsunieme $n-1$ paličiek, a tým vytvoríme rad k guličiek a $n-1$ paličiek, pričom nekladieme žiadne obmedzenia – môžme mať viacero paličiek pri sebe, paličkami môžeme začínať aj končiť; obdobne pre guličky. Počet guličiek pred prvou paličkou bude zodpovedať počtu vybratých objektov 1. typu, počet guličiek medzi prvou a druhou paličkou bude zodpovedať počtu vybratých objektov 2. typu, ... počet guličiek za poslednou $(n-1)$-vou paličkou bude zodpovedať objektom n-tého typu. Existuje jednoznačná vzájomná korešpodencia medzi takými postupnosťami guličiek a paličiek a kombináciami s opakovaním.

Teraz už zostáva len zrátať počet možností, ktorými môžeme rozmiestniť do radu k guličiek a $n-1$ paličiek. Miesta v rade si očíslujeme od 1 po $k+n-1$ a vyberieme z nich k, na ktoré dáme guličky. Toto môžeme urobiť $\binom{n+k-1}{k}$ spôsobmi. (Obdobne by sme mohli vyberat miesta pre paličky, dostali by sme $\binom{n+k-1}{n-1}$ možností, pričom obe uvedené kombinačné čísla sa rovnajú.)

2. dôkaz. Pokiaľ nám ide len o počet kombinácií s opakovaním, tak nezáleží, aké sú prvky n-prvkovej množiny M. Budeme teda predpokladať, že $M = \{1, 2, \ldots, n\}$. Každému výberu k prvkov z množiny M (prvky sa môžu opakovať a nie sú medzi sebou usporiadané) môžme jednoznačne priradiť k-ticu $a_1, a_2, \ldots, a_k$, pričom môžme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$. Prerobíme túto k-ticu takú, aby jednotlivé položky v nej tvorili rastúcu postupnosť. To urobíme tak, že pričítame postupne zvyšujúce sa číslo k jednotlivým položkám, dostaneme k-ticu $(b_1, b_2, \ldots, b_k) = (a_1+0, a_2+1, \ldots, a_k+(k-1))$. Je ľahko vidieť, že je jednoznačná korešpodencia mezi neklesajúcimi postupnosťami dĺžky k z čísel $1, 2, \ldots, n$ a medzi rastúcimi postupnosťami dĺžky k z čísel $1, 2, \ldots, n+k-1$. Počet rastúcich postupností dĺžky k z čísel $1, 2, \ldots, n+k-1$ zase zodpovedá počtu kombinácií bez opakovania k-tej triedy z $n+k-1$ prvkov. Preto, počet kombinácií s opakovaním k-tej triedy z n prvkov je $\binom{n+k-1}{k}$. $\square$

11 Permutácie s opakovaním

- Permutácie s opakavaním z k_1 prvkov prvého druhu, k_2 prvkov prvého druhu, $\ldots$, k_n prvkov n-tého druhu sú usporiadané $(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)$-tice, v ktorých sa prvok prvého druhu vyskytuje k_1-krát, prvok druhého druhu vyskytuje k_2-krát, ..., prvok n-tého druhu vyskytuje k_n-krát

Veta 11.1. *Počet permutácií s opakavaním z k_1 prvkov prvého druhu, k_2 prvkov druhého druhu, $\ldots$, k_n prvkov n-tého druhu je*

$$\frac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_n!},$$

kde $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$.

Dôkaz. Ak by všetkých k prvkov bolo rôznych, tak by išlo o permutácie (bez opakovania) a bolo by ich $k!$. Keďže prvkov jedného druhu môže byť viac, musíme tieto možnosti stotožniť, tomu zodopovedá menovateľ. $\square$

Číslo $\frac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}$ označujeme aj $\binom{k}{k_1,k_2,\ldots,k_n}$.

Príklad. Nahliadnite, že $\frac{(2n)!}{2^n}$ je celé číslo.

Riešenie. Keďže číslo $\frac{(2n)!}{2^n}$ zodpovedá počtu možných uložení do radu $2n$ objektov, pričom objekty sú n typov a z každého typu sú dva nerozlíšiteľné objekty, toto číslo musí byť celé. $\blacksquare$

Veta 11.2 (Polynomická veta)**.** *Pre každé prirodzené čísla n a k a reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí vzťah*

$$(x_1 + x_2 + \ldots x_n)^k = \sum_{k_1+k_2+\cdots k_n=k} \binom{k}{k_1, k_2, \ldots, k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}.$$

12 Asymptotické odhady

Nech $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Hovoríme, že

- $f(n) = O(g(n))$, ak existuje $C \in R^+$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq n_0$ platí: $|f(n)| \leq C \cdot |g(n)|$,
- $f(n) = \Omega(g(n))$, ak existuje $C \in R^+$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq n_0$ platí: $|f(n)| \geq C \cdot |g(n)|$,
- $f(n) = \Theta(g(n))$ ak $f(n) = O(g(n))$ a zároveň $f(n) = \Omega(g(n))$,
- $f(n) = o(g(n))$, ak $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$,
- $f(n) = \omega(g(n))$, ak $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$,
- $f(n) \equiv g(n)$, ak $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$.

13 Princíp zapojenia a vypojenia

Tento princíp slúži na spočítanie počtu prvkov zjednotenia konečného počtu konečných množín, pričom množiny nemusia byť disjunktné. Pre zjednotenie dvoch množín nie je ťažké nahliadnuť, že $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$.

Pre mohutnosť zjednotenia troch množín platí nasledovné:

$$\begin{array}{rcl} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = & (|A_1| + |A_2| + |A_3|) & \text{súčet mohutností jednotlivých množín} \\ - & (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) & \text{súčet mohutností prienikov dvojíc množín} \\ + & |A_1 \cap A_2 \cap A_3| & \text{súčet mohutností prienikov trojíc množín} \end{array}$$

Môžeme vidieť, že striedavo pričítavame a odčítavame súčet mohutností prienikov jednotlivých množín, dvojíc množín a trojíc množín. Toto platí aj pre viac množín. Nech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sú konečné množiny. Označíme symbolom S_k súčet mohutností prienikov k množín.

$$S_k = \sum_{1 \le n_1 \le n_2 \le \ldots \le n_k \le n} |A_{n_1} \cap A_{n_2} \cap \cdots \cap A_{n_k}|$$

Veta 13.1 (Princíp zapojenia a vypojenia)**.** *Nech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sú konečné množiny. Potom*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} S_i.$$

Dôkaz. Tvrdenie sa dá dokázať matematickou indukciou vzhľadom na počet množín n. My tu uvedieme dôkaz, ktorý pre daný prvok zráta, koľkokrát sa nachádza na ľavej a na prave strane dokazovanej rovnosti.

Ak nejaký prvok nepatrí do zjednotenia množín $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tak nebude zarátaný ani raz ani na ľavej ani na pravej strane rovnosti. Predpokladajme teraz, že najaký prvok p patrí zjednoteniu $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Na ľavej strane rovnosti je zarátany jedenkrát. Predpokladajme, že p sa nachádza v z množinách z $A_1, A_2, \ldots, A_n$, zjavne $1 \le z \le n$. V S_1 je prvok p započítaný z-krát, v S_2 je p započítaný $\binom{z}{2}$-krát, lebo sa nachádza v $\binom{z}{2}$ dvojiciach množín, v S_3 je p započítaný $\binom{z}{3}$-krát ... S_i je p započítaný $\binom{z}{i}$-krát, pričom pre nepárne i je táto hodnota započítana s kladným znamienkom a pre párne i je táto hodnota započítana so záporným znamienkom. Všimnite si, že pre $i > z$ je p v S_i započítaný nula krát, a teda v takomto prípade jeho príspevok do S_i nemusíme uvažovať. Dostávame $z - \binom{z}{2} + \binom{z}{3} + \ldots (-1)^{z+1}\binom{z}{z} = \binom{z}{0} - \left[\binom{z}{0} - \binom{z}{1} + \binom{z}{2} - \ldots + (-1)^z \binom{z}{z}\right] \overset{\text{Dôsledok 9.4}(b)}{=} \binom{z}{0} + 0 = 1$.

□

Príklad. Bežeckých pretekov sa zúčastnilo 100 bežcov, mali pridelené štartovné čísla $1, 2, \ldots, n$. Všetci bežci úspešne dobehli do cieľa a žiadni dvaja nedobehli naraz. Koľko možných výsledných poradí má aspoň jedného bežca, ktorého štartovné číslo sa rovná poradiu, na ktorom dobehol?

Nech A_i je množina všetkých výsledných poradí bežcov takých, že bežec číslom i dobehol na i-tom mieste. Toto poradie môže byť reprezentované vektorom dĺžky 100, kde jednotlivé položky sú celé čísla od 1 do 100, pričom čísla sa neopakujú – ide o permutácie množiny $1, 2, \ldots, 100$. Chceme teda spočítať koľko prvkov má množina $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{100}$. Spočítajme, aká je mohutnosť A_i. Číslo i musí byť na i-tom mieste, zvysných 99 čísiel môže byť rozmiestnených ľubovoľne na miestach rôznzch od i-teho, preto $|A_i| = 99!$. Súčet

$S_1 = |A_1| + |A_2| + \ldots |A_{100}| = 100.99!$. Pozrime sa teraz na S_2. Na výpočet hodnoty S_2 potrebujeme spočítať hodnoty $|A_i \cap A_j|$ pre $i, j \in \{1, 2, \ldots, 100\}$, $i \neq j$. Hodnota i má byť na i-tom mieste, j má byť na j-tom mieste a zvyšných 98 hodnôt môže byť rozmiestnených ľubovoľne, preto $|A_i \cap A_j| = 98!$. Dvojíc rôznych čísiel z množiny $\{1, 2, \ldots, 100\}$ je $\binom{100}{2}$, preto $S_2 = \binom{100}{2} \cdot 98!$. Obdobne dostávame, že $S_k = \binom{100}{k}(100-k)!$. Použitím princípu zapojenia a vypojenia dostávame

$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{100}| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} S_i = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\binom{100}{i}(100-i)!$

úpravami dostávame:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{100}| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{100!}{i!(100-i)!}(100-i)! = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{100!}{i!} = 100! \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{1}{i!}.$$

Počet výsledných poradí, kde aspoň jeden bežec dobehol na svojom mieste je $100! \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{1}{i!}$.
■

Príklad. Koľko riešení má rovnica $x_1 + x_2 + \cdots x_n = k$ ak $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú celé čísla a pre $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí $0 \leq x_i \leq 8$?

Každé riešenie je suporiadaná n-tica celých nezáporných čísiel, ktoré v súčte dajú k a každé z nich je nanajvýš 8. Vyriešme naprv tento príklad bez požiadavky na to, že každé x_i je nanajvýš 8. Jeden možný pohľad je že chceme vybrať k objektov z n druhov, čiže ide o kombinácie s opakovaním k-tej triedy z n prvkov. Tých je $\binom{n+k-1}{k}$. Alternatívne sa na to dá posriet tak, že máme umistniť do radu k guličie a $n-1$ oddeľovačov, čo takisto vedie k počtu možností $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$.

Od týchto možností musíme odčítať tie, ktoré porušujú podmienku $x_i \leq 8$ pre niektoré i. Nech A_i je množina riešení, ktoré porušujú podmienku pre x_i. Počet riešení, ktoré porušujú podmienku $\leq x_i \leq 8$ pre aspoň jedno i je $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$. Ak je porušená podmienka pre x_i, znamená to, že $x_i \geq 9$. Počet takýchto riešení nájdeme tak, že tomuto x_i vopred pridadíme 9 a zvyšných $k-9$ rozdelíme medzi všetky čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (vrátane x_i), čiže počet tých riešení, ktoré porušujú podmienku $x_i \leq 8$ je $\binom{n+k-1-8}{n-1}$, t.j. $|A_i| = \binom{n+k-1-8}{n-1}$. Obdobnou úvahou dostávame $|A_i \cap A_j| = \binom{n+k-1-2\cdot 8}{n-1}$ pre $i \neq j$ atď. Preto $S_i = \binom{n}{i} \cdot \binom{n+k-1-8.i}{n-1}$. Podľa princípu zapojenia a vypojenia platí $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} S_i = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i} \cdot \binom{n+k-1-8.i}{n-1}$.

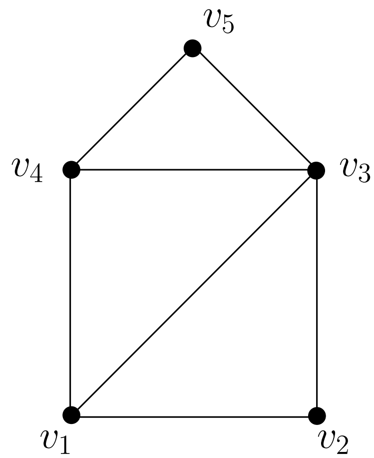
Zhrnutím teda dostávame, že počet tých riešení, ktoré neporušujú ani jednu z podmienok $\leq x_i \leq 8$ je $\binom{n+k-1}{n-1} - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i} \cdot \binom{n+k-1-8.i}{n-1} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i} \cdot \binom{n+k-1-8.i}{n-1}$.
■

14 Teória grafov

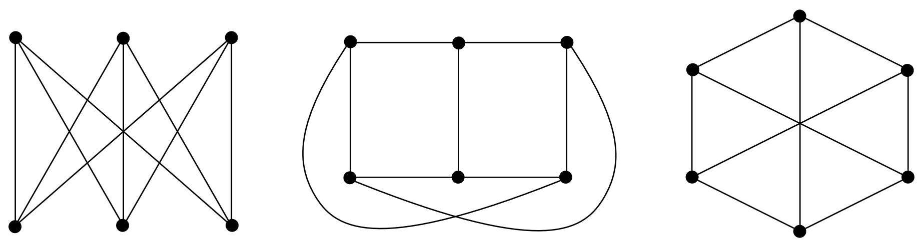
Teória grafov predstavuje jednu z kľúčových oblastí diskrétnej matematiky, ktorá nachádza široké uplatnenie v rôznych vedných disciplínach ako napríklad v informatike, matematike, sociológii. Grafy poskytujú abstraktný, ale veľmi výstižný spôsob modelovania vzťahov medzi objektmi. V týchto skriptách sa budeme zaoberať základnými pojmami a tvrdeniami z teórie grafov.

14.1 Definície

Graf je určený usporiadanou dvojicou množín. Presnejšie graf $G = (V, E)$, kde V je konečná množina objektov nazývaných *vrcholy* a E je konečná množina 2-prvkových pod-



Obr. 1: Graf $G = (\{v_1, v_2, \dots v_5\}, \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1, v_3v_5, v_4v_5, v_1v_3\})$



Obr. 2: Ktoré z týchto grafov sú izomorfné?

množín množiny V nazývaných *hrany*. Grafy obyčajne znárorňujeme v rovine: vrcholom priradíme rôzne body roviny každej hrane priradíme spojnicu medzi príslušnou dvojicou vrcholov. Hrana $\{u, v\}$ sa obyčajne zapisuje skrátene uv alebo ekvivalentne vu. Príklad grafu a jeho znázornenia v rovine je na Obr. 1.

Dva vrcholy u a v, medzi ktorými je hrana sa volajú *susedné*. Podobne dve hrany, ktorá sa stretajú vo vrchole sa volajú *súsedné*. Ak hrana ide do nejakého vrchola, tak je s ním *incidentná*. *Stupeň* vrchola v v grafe G je počet hrán incidentných s vrcholom v, označenie $\deg_G(v)$.

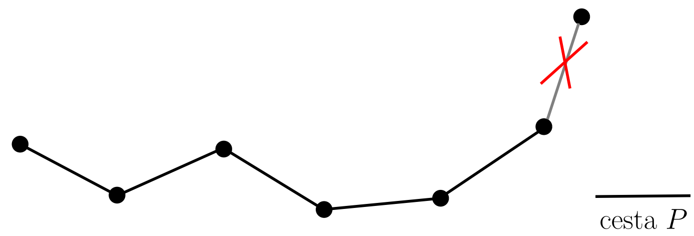
Prirodzená otázka je, ktoré grafy sú „rovnaké", teda jeden vznikne z druhého len premenovaním vrcholov. Toto odzrkadluje nasledujúci pojem. Dva grafy $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ sú izomorfné, ak existuje bijekcia $f : V \Rightarrow V'$ taká, že pre všetky $u, v \in V$ platí $uv \in E$ práve vtedy, keď $f(u)f(v) \in E'$.

♣ Rozhodnite, ktoré z grafov na Obr. 2 sú izomorfné.

Tvrdenie 14.1. *Každý graf má párny počet vrcholov nepárneho stupňa.*

Dôkaz. Súčet stupňov vrcholov $\sum_{v \in V(G)} d(v)$ je párne číslo, lebo každá hrana je zarátaná dvakrát. Z toho vyplýva, že v súčte je párny počet nepárnych sčítancov. □

- *sled* je postupnosť $v_1e_1v_2e_2v_3 \dots v_n$, kde v_i je vrchol pre $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, e_i je hrana pre $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ a $e_i = v_iv_{i+1}$
- *ťah* je sled, v ktorom sa neopakujú hrany



Obr. 3: Susedia koncového vrcholu najdlhšej cesty musia ležať na ceste

- *cesta* je sled, v ktorom sa neopakujú vrcholy (a teda ani hrany); *u-v-cesta* je cesta s koncovými vrcholmi u a v
- *dĺžka* cesty (sledu/ťahu) je počet hrán (sledu/ťahu)
- *uzavretý ťah (sled)* je ťah (sled), ktorého prvý a posledný vrchol sa rovnajú
- *kržunica* je ťah, v ktorom sa prvý a posledný vrchol rovnajú a všetky ostatné dvojice vrcholov sú rôzne
- keďže uvažujeme jednoduché grafy (t.j. grafy bez slučiek a násobných hrán), sled, ťah a cesta sú jednoznačne zadané postupnosťou vrcholov, a teda názvy hrán nemusíme písať

Minimálny stupeň vrchola $\delta(G)$ grafu $G = (V, E)$ je minimum zo stupňov vrcholov grafu, t.j. $\delta(G) = \min\{deg_G(v); v \in V\}$. Obdobne *maximálny stupeň vrchola* $\Delta(G)$ je maximum zo stupňov vrcholov grafu, t.j. $\Delta(G) = \max\{deg_G(v); v \in V\}$.

Tvrdenie 14.2. *Každý graf G obsahuje cestu dĺžky $\delta(G)$.*

Dôkaz. Nech $P = v_1 v_2 \dots v_n$ je najdlhšia cesta v grafe G. Ak by nejaký sused vrchola v_n ležal mimo P, tak by to bolo v spore s tým, že P je najdlhšia cesta v G. Preto všetci susedia v_n, ktorých je aspoň $\delta(G)$ ležia na P, pozri Obr. 3. Vrchol v_n takisto leží na P, a teda P má aspoň $\delta(G) + 1$ vrcholov. Z toho vyplýva, že dĺžka P je aspoň $\delta(G)$. □

Graf je *súvislý* ak medzi každou dvojicou vrcholov existuje cesta, inak je *nesúvislý*. *Komponent* grafu G je maximálny súvislý podgraf grafu G vzhľadom na inklúziu. Graf nazveme *acyklický*, ak neobsahuje kružnicu. *Strom* je súvislý acyklický graf, *les* je acyklický graf a *list* je vrchol stupňa 1 v strome. *Triviálny* graf je graf, ktorý má jeden vrchol a žiadne hrany.

Tvrdenie 14.3. *Platia nasledujúce tvrdenia.*
(a) *Každý netriviálny strom má aspoň dva listy.*
(b) *Počet hrán n-vrcholového stromu je $n - 1$.*

Dôkaz. (a) Nech P je najdlhšia cesta v netriviálnom strome T. Jej konce musia byť listy, lebo inak by strom obsahoval kružnicu. Keďže T je netriviálny, dva koncové vrcholy najdlhšej cesty sú rôzne.
(b) Budeme dokazovať matematickou indukciu vzhľadom na počet vrcholov grafu. Ak strom má jeden vrchol, nemá žiadne hrany a tvrdenie platí. Pre dôkaz indukčného kroku predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky stromy na n vrcholoch a dokážeme tvrdenie

pre všetky stromy na $n+1$ vrcholoch. Nech T je ľubovoľný strom na $n+1$ vrcholoch. Podľa časti (a) tohoto tvrdenia, T obsahuje list, nech v je ľubovoľný list stromu T. Vytvorme strom T' tak, že z T odoberieme v a jedinú hranu incidentnú s v. (Je ľahké vidieť, že T' je súvislý a acyklický, a teda je strom.) Kedže T' má n vrcholov, má $n-1$ hrán. Z toho vyplýva, že T má n hrán, čo bolo treba dokázať. □

Kostra grafu G je podgraf grafu G, ktorý je strom a obsahuje všetky vrcholy grafu G

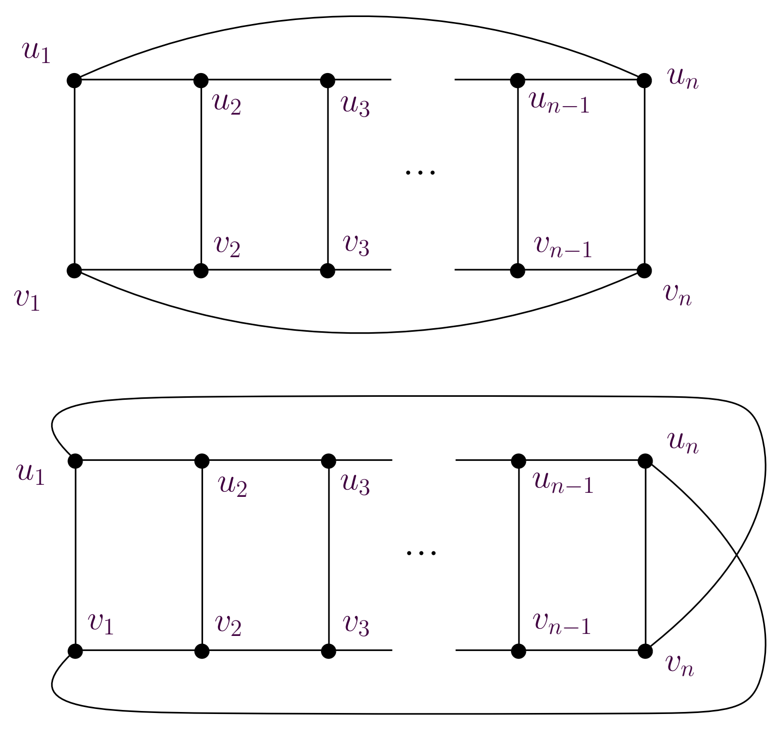
Tvrdenie 14.4. *Každý súvislý graf obsahuje kostru.*

Dôkaz. Opakovane vyhadzujeme ľubovoľnú hranu, ktorá leží v kružnici. Týmto postupom dostaneme súvislý acyklický graf, teda strom, ktorý obsahuje všetky vrcholy pôvodného grafu. □

14.2 Bipartitné grafy

Graf G je *bipartitný* ak $V(G)$ sa dá rozdeliť dvoch disjunktných množín A a B tak, že každá hrana má jeden koncový vrchol v A a druhý v B.

♣ Pre ktoré čísla n sú grafy nazývané *rebrík* a *skrútený rebrík* bipartitné? (Obr. 4)



Obr. 4: Rebrík R_n a Skrútený rebrík S_n

Ľahko sa dá nahliadnuť, že v bipartitnom grafe má každá kružnica párnu dĺžku. Dokážeme, že platí aj opačná implikácia. Najprv však dokážeme nasledujúcu lemu.

Lema 14.5. *Každý uzavretý sled nepárnej dĺžky obsahuje kružnicu nepárnej dĺžky.*

Dôkaz. Budeme postupovať matematickou indukciou vzhľadom na dĺžku sledu. Ako bázu zoberieme uzavretý sled na troch hranách (uzavretý sled na jednej hrane v jednoduchých grafoch neexistuje). A keďže uzavretý sled na troch hranách je kružnica na troch hranách, tu tvrdenie platí.

Majte uzavretý sled S nepárnej dĺžky d a predpokladajme, že pre všetky uzavreté sledy nepárnej dĺžky menšej ako d toto tvrdenie platí. Nech $S = v_1v_2 \dots v_n$, pričom $v_n = v_1$.

Prípad 1. $v_i \neq v_j$ pre všetky $i \neq j$, kde $i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, a teda vrcholy sa v slede neopakujú okrem $v_n = v_1$. V tomto prípade je S kružnicou nepárnej dĺžky.

Prípad 2. $v_i = v_j$ pre nejaké $i \neq j$, kde $i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $i < j$. Uvažujme dva sledy
$S' = v_1v_2 \dots v_i = v_jv_{j+1} \dots v_n = v_1$ a
$S'' = v_iv_{i+1} \dots v_j = v_i$.

Ľahko vidno, že oba S' aj S'' sú uzavreté sledy. Navyše dĺžka sledu S je súčtom dĺžok sledov S' a S'', a keďže S je nepárnej dĺžky, dĺžka práve jedného z S' a S'' je nepárna, nech je to S'. Použitím indukčného predpokladu nahliadneme, že S' a teda aj S obsahuje uzavretý sled nepárnej dĺžky. □

Poznamenajme, že ak by sme zmenili oba výskyty slova nepárny v znení lemy na slovo párny, tvrdenie by nebolo pravdivé.

♣ Nájdete príklad sledu, ktorý je protipríkladom k pozmenenému tvrdeniu.

Vzdialenosť vrcholov u a v v grafe G, označenie $dist(u, v)$, je dĺžka najkratšej u-v-cesty

Veta 14.6. *Graf je bipartitný práve vtedy, keď neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky.*

Dôkaz. Dokážeme dve implikácie.

($\Rightarrow$) Táto implikácia je zrejmá, keďže na každej kružnici sa musia striedať vrcholy z dvoch množín.

($\Leftarrow$) Majme graf G ktorý má každú kružnicu párnej dĺžky. Dokážeme, že G je bipartitný. Môžme predpokladať, že G je súvislý, lebo inak môžme urobiť nasledujúcu úvahu pre každý komponent a využiť fakt, že zjednotenie bipartitných grafov je bipartitný graf. Nech x je ľubovoľný pevne zvolený vrchol grafu G. Rozdeľme množinu $V(G)$ do dvoch množín:

$A = \{v \in V(G); dist(v, x) \text{ je párne číslo}\}$ a
$B = \{v \in V(G); dist(v, x) \text{ je nepárne číslo}\}$.

Zjavne každý vrchol z $V(G)$ patrí do práve jednej z množín A a B. Ukážeme, že každá hrana z $E(G)$ má jeden koniec v A a druhý v B. Sporom predpokladajme, že existuje hrana $e \in E(G)$, ktorej oba koncové vrcholy patria A. (Dôkaz, že oba koncové vrcholy nemôžu patriť B je obdobný.) Nech $e = uv$, nech P' je cesta, na ktorej sa nadobúda najkratšia vzdialenosť medzi u a x a nech P'' je cesta, na ktorej sa nadobúda najkratšia vzdialenosť medzi v a x. Potom $S = P' \cup P'' \cup uv$ je uzavretý sled. Keďže u aj v patria A, obe cesty P' a P'' majú párnu dĺžku. Sled S je teda nepárnej dĺžky a podľa Lemy 14.5 obsahuje kružnicu nepárnej dĺžky, čo je v spore s predpokladom. Dôkaz spätnej implikácie je ukončený. □

14.3 Eulerovské grafy

Eulerovský ťah v grafe G je uzavretý ťah obsahujúci všetky hrany grafu G. Graf je *eulerovský* ak obsahuje eulerovský ťah.

Lema 14.7. *Ak pre graf G platí, že $\delta(G) \geq 2$, potom graf obsahuje kružnicu.*

Dôkaz. Zoberme si najdlhšiu cestu P v G. Jej koncový vrchol v je okrem hrany patriacej P incidentný s ešte aspoň jednou hranou, lebo $\delta(G) \geq 2$. Nech u je druhý vrchol tejto hrany; vrchol u musí patriť P inak by nastal spor s tým, že P je najdlhšia. Potom $P[uv]vu$ je kružnica, kde $P[uv]$ označuje podcestu cesty P ohraničenú vrcholmi u, v. □

Veta 14.8. *Súvislý graf G je eulerovký práve vtedy, keď stupeň každého jeho vrchola je párny.*

Dôkaz. Nech G je eulerovský, teda obsahuje eulerovský ťah. Pre každý vrchol, okrem počiatočneho, môžeme hrany s ním incidnté rozdeliť do dvojíc tak, že hrany ktoré po sebe nasledovali v prechádzaní eulerovským ťahom budú tvoriť dvojicu. To dokazuje, že každý vrchol, ktorý nie je počiatočný má párny stupeň. Pre hrany incidentné s počiatočným vcholom možeme podobne rozdeliť do dvojíc okrem prvej a poslednej hrany. Z toto vyplýva, že stupeň každého vrchola je párny. To dokazuje doprednú implikáciu.

Pre dôkaz opačnej implikácie budeme postupovať matematickou indukciou vzhľadom na počet hrán. Bázu budú tvoriť grafy, ktoré sú kružnicami, tu zrejme tvrdenie platí. Indukčný krok dokážeme takto: keďže stupeň každého vrchola je párny a G je súvislý, tak G je buď triviálny alebo stupeň každého vrchola je párny a aspoň 2. Ak G je trviálny, tak obsahuje prázdny eulerovský ťah. Predpokladajme preto, že stupeň každého vrchola je párny a aspoň 2. Podľa Lemy 14.7, G obsahuje kružnicu, povedzme C. Ak $G = C$, tento prípad je pokrytý tvrdením pre bázu. Nech teda $G - E(C)$ má nejaké hrany. Stupne vrcholov v grafe $G - E(C)$ sú párne – ak cez vrchol neprechádzala kružnica C, tak jeho stupeň v G a $G - E(C)$ sa rovná, inak je zmenšený o 2. Nech $H_1, H_2, \ldots, H_r$ sú netriviálne komponenty grafu $G - E(C)$. Vyberme z každého komponentu H_i vrchol h_i taký, že $h_i \in C \cap H_i$; zjavne taký existuje. Podľa indukčkného predpokladu každý z komponentov H_i obsahuje eulerovský ťah T_i, bez ujmy na všeobecnosti môzeme predpokladať, že T_i začína a končí v H_i. Eulerovský ťah v G vytvoríme tak, že budeme prechádzať po C a keď sa dostaneme do h_i pre nejaké i, tak prejdeme ťah T_i. Následne pokračujeme ďalej po C a postup opakujeme, kým neprejdeme všetky hrany kružnice C ako aj všetky sledy T_i. □

15 Súvislosť

- Zopakujeme, že graf je *súvislý*, ak medzi ľubovoľnou dvojicou jeho vrcholov existuje cesta a *komponent* grafu je maximálny súvislý podgraf grafu (vzhľadom na inklúziu).
- *artikulácia* je vrchol, odobratím ktorého vznikne graf s viac komponentmi, ako mal pôvodný graf; podobne *most* je hrana, odobratím ktorej vznikne graf s viac komponentmi, ako mal pôvodný graf
- *blok* – maximálny súvislý podgraf bez artikulácií
- ak z grafu odoberáme vrchol, tak s ním musíme odobrať aj všetky hrany s ním incidentné. Ak z grafu odoberáme hranu, koncové vrcholy ponechávame. Ak W je množina vrcholov alebo graf a z je vrchol, tak $W - \{z\}$ zapisujeme aj $W - z$. Obdobné platí, ak ide o hranu.

♣ V ktorých súvislých grafoch existuje množina vrcholov, odobratím ktorej dostaneme nesúvislý graf?

- graf G sa nazýva *k-súvislým* ak $|V(G)| > k$ a pre každú množinu vrcholov $X \subseteq V$ takú, že $|X| < k$ platí, že graf $G - X$ je súvislý. Najväčšie celé číslo k také, že G je k-súvislý sa nazýva *súvislosť* $\kappa(G)$ grafu G. Súvislosť nekompletného grafu je teda najmenšie číslo m také, že graf obsahuje m, odobratím ktorých sa stane nesúvislým.

- platí teda: $\kappa(K_1) = 0$, $\kappa(G) = 0$ pre nesúvislý graf G, $\kappa(K_n) = n - 1$ pre všetky $n \geq 1$

- graf G sa nazýva *hranovo l-súvislý* ak $|V(G)| > 1$ a pre každú množinu hrán F grafu G takú, že $|F| < k$ je graf $G - F$ súvislý. Najväčšie celé číslo l také, že G je hranovo l-súvislý sa volá *hranová súvislosť* $\lambda(G)$ grafu G. Hranová súvislosť je teda najmenšie číslo m také, že graf obsahuje m, odobratím ktorých sa stane nesúvislým.

- $\lambda(G) = 0$ ak G je nesúvislý

♣ Je pravda, že ak $d(v) \geq 2$ pre všetky vrcholy grafu G, tak G je vrcholovo 2-súvislý?

♣ Je pravda, že keď všetky vrcholy grafu ležia na kružnici, tak je 2-súvisislý?

Tvrdenie 15.1. *Ak G je netriviálny, tak $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.*

Dôkaz. Druhá nerovnosť vyplýva z toho, že množina všetkých hrán vzchádzajúcich z jedného vrcholu tvorí hranový rez. Predpokladajme teraz, že F je minimálna množina hrán, taká že $G - F$ je nesúvislý. Ukážeme, že $\kappa(G) \leq |F|$.

Najprv predpokladajme, že G obsahuje vrchol v, ktorý nie je incidentný so žiadnou hranou z F. Nech C je komponent grafu $G - F$, ktorý obsahuje v. Potom vrcholy $C \cap F$ oddeľujú v od $G - C$ a teda $\kappa(G) \leq |F|$.

Predpokladajme teraz, že každý vrchol grafu G je incidentný s hranou z F. Nech v je ľubovoľný vrchol grafu G a nech C je komponent grafu $G - F$, ktorý obsahuje vrchol v. Potom susedia v v C sú incidentní s rôznymi hranami z F a teda $d(v) \leq |F|$. Ak $V(G) \neq \{v\} \cup N(v)$, tak $N(v)$ separuje v od zvyšku grafu. Inak $V(G) = \{v\} \cup N(v)$. Túto úvahu môžeme urobiť pre ľubovoľný vrchol. Buď teda existuje v G vrchol x taký, že $N(x)$ separuje x od zvyšku grafu alebo pre všetky $x \in V(G)$ platí, že $V(G) = \{x\} \cup N(x)$. V druhom prípade je G kompletný graf a tvrdenie platí, lebo $\kappa(G) = \lambda(G) = |V(G)| - 1$. □

16 Planárne grafy

- graf sa nazýva *planárny* ak sa dá nakresliť v rovine tak, že hrany majú prienik iba na ich koncoch

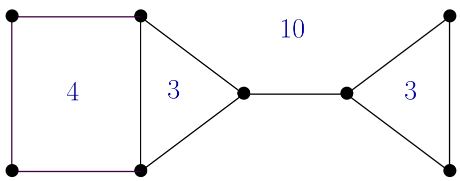
♣ Nahliadnite, že graf $K_5 - e$, teda graf, ktorý vnikne z K_5 odstránením jednej hrany, je planárny.

Veta 16.1. *Graf je vnoriteľný do roviny práve vtedy, keď je vnoriteľný do sféry.*

- Rovinný graf rozdelí rovinu na lineárne súvislé otvorené množiny. Tieto množiny sa volajú *oblasti*.

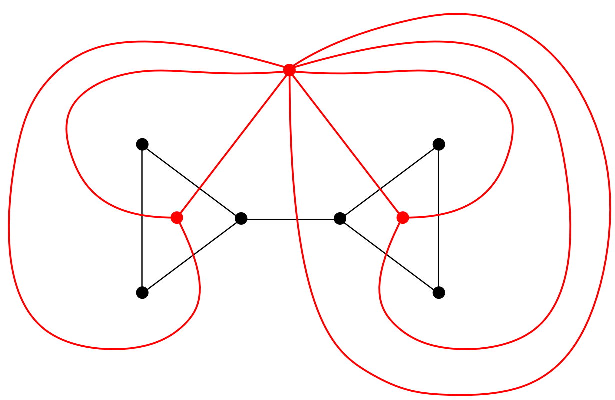
- Každý rovinný graf má práve jednu neohraničenú oblasť, ktorú voláme *vonkajšia oblasť*.

- *Dĺžka oblasti* je dĺžka uzavretého sledu, ktorý danú oblasť ohraničuje, pozri Obr. 5.



Obr. 5: Rovinný graf s dĺžkami oblastí. Všimnite si, že v dĺžke vonkajšej oblasti je jedna hrana zarátaná dvakrát, lebo ohraničujúci sled používa túto hranu dvakrát.

- Majme rovinný graf G. Duálnym grafom G^* ku grafu G nazveme taký graf, ktorého vrcholy zodpovedajú oblastiam grafu G a dva vrcholy sú spojené hranou ak zodpovedajúce odblasti zdieľajú spoločnú hranu, pozri Obr. 6. Všimnite si, že ak G má most, potom G^* má slučku, a naopak. Ak dvojica oblastí zdieľa viac ako jednu hranu, v duálnom grafe sa to prejaví ako násobná hrana.



Obr. 6: Červený graf je duálny k čiernemu a naopak

Veta 16.2 (Eulerova formula)**.** *Pre každý súvislý rovinný graf G platí*

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2.$$

Dôkaz. Budeme postupovať matematickou indukciou vzhľadom na počet hrán.
Ak G je strom, tak $|V(G)| = |E(G)| + 1$ a $|F(G)| = 1$, a tvrdenie platí.

Inak, ak G nie je strom, zoberme hranu $e \in G$, ktorá leží na kružnici. Nech $G' = G - e$. Potom G' je súvislý rovinný graf, $E(G') = E(G) - 1$, $V(G)' = V(G)$ a $F(G') = F(G) - 1$. Z indukčného predpokladu, $|V(G')| - |E(G') + |F(G')| = 2$ a teda aj $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$. $\square$

♣ Ako treba pozmeniť Eulerovu formulu, aby platila pre graf s $k \geq 1$ komponentmi?

Dôsledok 16.3. *Každé rovinné vnorenie súvislého planárneho grafu má rovnaký počet oblastí.*

Dôsledok 16.4. *Nech G je planárny graf s aspoň tromi vrcholmi. Potom*
(a) $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$
(b) *ak G nemá trojuholníky, tak $|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$.*

Dôkaz. (a) Majme nejaké rovinné nakreslenie grafu G. Potom

$$2|E(G)| = \sum_{f \in F(G)} d(f) \geq 3|F(G)| = 3(|E(G)| - |V(G)| + 2),$$

pričom posledná vyplýva z Eulerovej formuly. Úpravou dostávame:

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6.$$

(b) Obdobne, ako v (a),

$$2|E(G)| = \sum_{f \in F(G)} d(f) \geq 4|F(G)| = 4(|E(G)| - |V(G)| + 2),$$

z čoho dostávame

$$|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4.$$

□

♣ Kde sme v predchádzajúcom dôsledku využili, že graf má aspoň tri vrcholy?

Dôsledok 16.5. *Každý planárny graf má vrchol stupňa najviac* 5.

Dôkaz. Sporom predpokladajme, že v planárnom grafe G sú všetky vrcholy stupňa aspoň 6. Potom $2|E(G)| = \sum_{v \in V(G)} d(v) \geq 6|V(G)|$ a teda $|E(G)| \geq 3|V(G)|$, spor. □

Dôsledok 16.6. *Grafy K_5 a $K_{3,3}$ nie sú planárne.*

Dôkaz. Sporom predpokladáme, že sú planárne a z počtu vrcholov a hrán odvodíme spor. □

Nasledujúcu vetu, ktorá charakterizuje planárne grafy uvedieme bez dôkazu.

Veta 16.7 (Kuratowski 1930, Wagner 1937)**.** *Graf je planárny práve vtedy, keď neobsahuje subdivíziu K_5 ani $K_{3,3}$.*

17 Farbenia grafov

- *vrcholové farbenie* grafu $G = (V, E)$ je zobrazenie $c : V \to S$, prvkom množiny S hovoríme aj farby
- *vrcholové k-farbenie* grafu $G = (V, E)$ je zobrazenie $c : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$; čísla $1, 2, \ldots, k$ nazývame aj *farbami*
- *hranové k-farbenie* grafu $G = (V, E)$ je zobrazenie $c : E \to \{1, 2, \ldots, k\}$
- *regulárne* farbenie – susedné objekty majú rôzne farby. Niekedy sa toto slovo vynecháva – ak je zrejmé z kontextu.
- graf je (vrcholovo/hranovo) k-zafarbiteľný ak má vrcholové/hranové k-zafarbenie
- *chromatické číslo* $\chi(G)$ je najmenšie k také, že G má (vrcholové) k-farbenie
- *chromatické index* $\chi'(G)$ je najmenšie k také, že G má hranové k-farbenie

17.1 Vrcholové farbenia

Majme graf G, ktorý chceme regulárne vrcholovo zafarbiť. Pozrime sa na jednoduchý greedy algoritmus. Zoraďme vrcholy grafu G do ľubovoľného poradia a v tomto poradí ich farbíme tak, že pre daný vrchol vždy použijeme farbu s najnižším číslom, ktorá nie je použitá na jeho susedov. Keďže každý vrchol má najviac $\Delta(G)$ susedov, použijeme najviac $\Delta(G) + 1$ farieb, a teda platí, že $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

♣ Nájdite príklady grafov, kde je uvedený odhad tesný, teda platí $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.

Nasledujúcu vetu uvedieme bez dôkazu.

Veta 17.1 (Brooks, 1941). *Nech G je súvislý graf. Ak G nie je kompletný graf ani nepárna kružnica, tak*

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

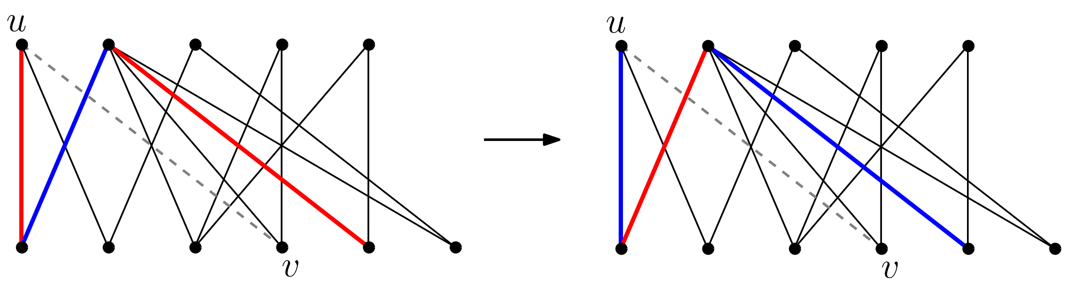
17.2 Hranové farbenia

- je zrejmé, že platí $\chi'(G) \geq \Delta(G)$

Veta 17.2 (König, 1916). *Pre každý bipartitný graf G platí $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Dôkaz. Matematickou indukciou vzhľadom na počet hrán. Ak $|E(G)| = 0$ tvrdenie platí. Majme teraz bipartitný graf G a predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky bipartitné grafy s menším počtom hrán. Vyberme $e \in E(G)$ a vytvorme graf $H := G - e$. Ak $\Delta(H) < \Delta(G)$, tak použijeme $\Delta(H)$ farieb na graf H a novou farbou zafarbíme hranu e. Predpokladajme teda, že $\Delta(H) = \Delta(G)$. Nech $e = uv$. Keďže stupeň $|E(H)| < |E(G)|$, môžeme použiť indukčný predpoklad na graf H a zafarbiť jeho hrany $\Delta(G)$ farbami, nech $f : E(G) \to \{1, 2, \ldots, \Delta(G)\}$ je takéto hranové farbenie. Stupne vrcholov u a v sú v grafe H menšie, ako $\Delta(G)$, a teda pre každý z týchto vrcholov existuje farba z $\{1, 2, \ldots, \Delta(G)\}$, ktorá vo farbení f nie je použitá na hranu incidentnú s daným vrcholom. Nech vo vrchole u nie je prítomná farba α a vo vrchole v nie je prítomná farba β (ak vo vrchole chýba viacero farieb, vyberieme ľubovoľnú z nich). Ak platí $\alpha = \beta$, dofarbíme hranu e farbou α a máme hranové farbenie grafu G.

Nech teda $\alpha \neq \beta$. Nech P je nepredĺžiteľná cesta, ktorá začína vo vrchole u a používa len farby α a β (nahliadnite, že je to cesta). Cesta P nemôže končiť vo vrchole v. Ak by to tak bolo, tak cesta P by bola párnej dĺžky, keďže sa na nej striedajú hrany farieb α a β a v u chýba α a vo v chýba β. Teda $P \cup e$ je kružnica nepárnej dĺžky, čo je v bipartitnom grafe nemožné podľa Vety 14.6. To znamená, že P končí v inom vrchole ako v (a zjavne cez v ani neprechádza). Vymeníme farby α a β dostaneme iné regulárne hranové farbenie, povedzme f'. Vo farbení f' je farba β neprítomná v oboch vrcholoch u aj v, pozri Obr. 7. Dofarbením hrany e farbou β dostávame hranové farbenie grafu G. □



Obr. 7: Výmena farieb α a *beta* na ceste P

Poznamenajme, že nepredĺžiteľnej 2-farebnej ceste sa hovorí *Kempeho reťazec* a výmene farieb na nej sa nazýva *Kempe prepnutie*.

Podobne, ako pri vrcholových farbeniach tu uvedieme horný odhad minimálneho počtu farieb potrebného na regulárne hranové farbenie bez dôkazu.

Veta 17.3 (Vizing, 1964)**.** *Pre každý jednoduchý graf G platí*

$$\Delta(G)\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

17.3 Farbenia planárnych grafov

V roku 1852, matematik Francis Guthrie, inšpirovaný farbením mapy anglicka položil nasledujúcu otázku.

Problém štyroch farieb. *Dokážte, že oblasti ľubovoľného rovinného grafu bez mostov možno zafarbiť najviac štyrmi farbami tak, aby susedné oblasti (tie, čo majú spoločnú hranu na hranici) boli zafarbené rôznou farbou.*

Prvý všeobecne akceptovaný dôkaz urobili v roku 1976 Appel and Haken; tento dôkaz bol urobený s pomocou počítaču.

My tu teraz uvedieme s dôkazom slabšiu verziu – ukážeme, že päť farieb stačí. Predtým však prevedieme problém farbení oblastí na problém vrcholového farbenia planárneho grafu.

V duálnom grafe vrcholy zodpovedajú oblastiam pôvodného grafu a naopak. Preto oblasti bezmostového rovinného grafu G sa dajú k zafarbiť tak, že oblasti, ktoré zdieľajú nenulový úsek hranice majú rôznu farbu práve vtedy, ak G^* je regulárne k-zafarbiteľný.

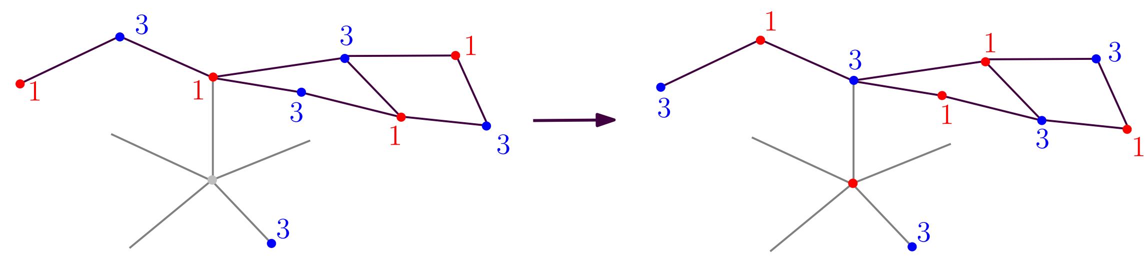
Z duality vyplýva ekvivalentná formulácia Problému štyroch farieb:

Pre každý rovinný graf G (bez slučiek) platí $\chi(G) \leq 4$.

Dokážeme slabší variant, a to že päť farieb stačí na regulárne zafarbenie každého planárneho grafu (bez slučiek).

Veta 17.4 (Heawood, 1890)**.** *Pre každý planárny graf G platí $\chi(G) \leq 5$.*

Dôkaz. Budeme postupovať matematickou indukciou na počet vrcholov. Báza indukcie zrejme platí. Podľa Lemy 16.5, každý planárny graf má vrchol stupňa nanajvýš 5, povedzme v. Podľa indukčného predpokladu, graf $G - v$ má (vrcholové) 5-zafarbenie. Ak je nejaká farba z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ nepoužitá na suseda vrchola v, dofarbíme touto farbou vrchol v a máme regulárne zafarbenie všetkých vrcholov. Inak môžeme predpokladať, že susedia vrcholu v v G sú $v_1, v_2, \ldots, v_5$ v cyklickom poradí podľa vnorenia a v_i je zafarbený farbou i. Podgraf indukovaný vrcholmi ľubovoľných dvoch farieb je bipartitný. Ak komponent grafu $G-v$, indukovaný farbami 1 a 3 obsahujúci v_1 neobsahuje v_3, vymeníme farby v tomto komponente a vrchol v zafarbíme farbou 1, Obr. 8. Predpokladajme teda, že komponent grafu $G - v$, indukovaný farbami 1 a 3 obsahujúci v_1 obsahuje v_3. Potom ale, keďže graf je planárny, komponent indukovaný farbami 2 a 4 obsahujúci v_2 neobsahuje v_4. Prefarbíme tento komponent a zafarbíme v farbou 2. □



Obr. 8: Výmena farieb v dôkaze Heawoodovej vety

Literatúra

[1] *Diskrétna matematika*, učebný text Trnavskej univerzity, elektronický dokument. https://pdf.truni.sk/e-ucebnice/ diskretna-matematika/

[2] R. Diestel, *Graph Theory*, Sixth Edition, Graduate Texts in Mathematics, Volume 173, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2025.

[3] R. P. Grimaldi, *Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction*, Fifth Edition, Pearson Addison Wesley, 2004.

[4] J. Kollár, M. Polakovič, *Diskrétna matematika pre študentov aplikovanej informatiky FEI STU*, vysokoškolské skriptá FEI STU, elektronický dokument. http://matika.fei.stuba.sk/KMAT/DiskretnaMatematika/Polakovic? action=AttachFiledo=gettarget=skripta2.pdf

[5] J. Matoušek, J. Nešetřil, *Kapitoly z diskrétní matematiky*, 5. vydání, Univerzita Karlova v Praze, Nakladatelství Karolinum, Praha, 2022.

[6] M. Škoviera, *Množiny, kombinatorika, logické funkcie, teória grafov*, vysokoškolské skriptá, FMFI UK, elektronický dokument. http://www.dcs.fmph.uniba.sk/ rajnik/skripta/skriptaSkoviera.pdf

[7] E. Toman, *Úvod do diskrétnych štruktúr*, vysokoškolské skriptá, FMFI UK, Bratislava, 2009. http://www.dcs.fmph.uniba.sk/ rajnik/skripta/skriptaToman.pdf