

Domáce úlohy z Matematickej propedeutiky 1

Odovzdať do 18. 11. 2025:

1. Nájdite definičný obor a obor hodnôt funkcie $f(x) = \log_2(\sin 3x + \cos 3x)$.
2. Máme určitý počet krabičiek a určitý počet guľôčok. Ak dáme do každej krabičky práve jednu guľôčku, ostane nám n guľôčok. Keď však necháme práve n krabičiek bokom, môžeme všetky guľôčky rozmiestniť tak, aby ich v každej zostávajúcej krabičke bolo práve n . Koľko máme krabičiek a koľko guľôčok? (Nestačí odvodiť „hocijaké“ vzorce: z riešenia musí byť jasné, že uvedené počty sú celé čísla.)
3. Traja poslanci robia správne rozhodnutia s pravdepodobnosťou postupne $7/10$, $8/10$ a $9/10$. Pri hlasovaní rozhoduje väčšina hlasov. Je lepšie, ak bude každý hlasovať nezávisle, alebo by dvaja menej schopní poslanci mali kopírovať hlasovanie toho najschopnejšieho? (Návod: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403847>)
4. Dokážte, že číslo $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ je iracionálne.
5. Dokážte, že ak a a n sú nepárne kladné celé čísla, tak 2^{n+1} delí $a^{2^n} - 1$. (Pozor: $x^{y^z} = x^{(y^z)}$.)
6. Rozhodnite, či možno nájsť v $\mathbb{R}^3$ nekonečnú množinu vektorov takú, že každé tri jej prvky tvoria bázu. (Svoje tvrdenie poriadne zdôvodnite.)

(pokračovanie na ďalšej strane)

Odovzdať do 12. 12. 2025:

7. Dokážte, že pre každé celé $n > 2$ platí $\sqrt[n]{n} + \frac{1}{n} < 2$.
(Návod: uvažujte o hornom ohraničení množiny $\{\sqrt[n]{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$.)
8. Nájdite všetky reálne čísla k také, že nerovnosť $x^3 + kx + 1 \geq 0$ platí pre všetky kladné reálne čísla x .
9. Pre každé nezáporné celé číslo n platí $7 \mid 2^{2n+1} + 5^{2n+1}$.
(a) Dokážte toto tvrdenie matematickou indukciou.
(b) Dokážte toto tvrdenie pomocou počítania zvyškov mocnín čísel 2 a 5 po delení 7 bez využitia indukcie.
10. Nájdite racionálne čísla a, b, c, d také, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = an^3 + bn^2 + cn + d.$$

Dokážte, že nájdené čísla majú požadovanú vlastnosť.

11. Nájdite najväčšie kladné celé číslo d , ktoré má vlastnosť, že pre ľubovoľné kladné celé číslo n je hodnota výrazu $V(n) = n^4 + 11n^2 - 12$ násobkom čísla d . (Vaše riešenie musí zdôvodniť, že nájdené číslo vyhovuje, a aj to, že je najväčšie vyhovujúce. Môžete si napísať pomocný program, zdôvodnenie by sa však na program nemalo odkazovať, to by sa musela dokazovať tiež jeho správnosť atď.)
12. Uvažujme výnos akciového trhu 9% p. a. (každý rok rovnaký, pre všetky investície uvažované nižšie) a dobu sporenia 40 rokov. (Pri riešení môžete využiť tabuľkový kalkulačtor či odvodiť všeobecné vzorce.)
- (a) Zvažujeme dve rôzne investície 1000 eur:
- A. Do aktívne spravovaného podielového fondu s ročným poplatkom 1,5% z hodnoty investície na konci roka.
- B. Do pasívneho indexového ETF (fond obchodovaný na burze) s ročným poplatkom 0,2% z hodnoty investície na konci roka.
- Uvažujeme nulové zdanenie výnosov. Porovnajte výslednú hodnotu investovaných peňazí. (Pointa: na poplatkoch záleží.)
- (b) Uvažujme sadzbu dane z výnosov 19% a nulové poplatky. Akú sumu našetríme pri pravidelnom mesačnom vkladaní 200 eur, ak sa výnosy zdaňujú len raz na konci, a akú, ak by sa výnosy zdaňovali každoročne na konci roka? (Pointa: Na spôsobe zdaňovania záleží.)
- (Návod: napr. <https://www.investopedia.com/terms/c/compoundinterest.asp>.)