Matematika 4 — Logika pre informatikov: Final (písomná časť skúšky)

24. mája 2019 Meno: .....

Na vyriešenie testu máte **120 minút**.

Riešenia úloh môžu získať plné hodnotenie, iba ak je ich postup **zrozumiteľný a zdôvodnený**.

Test vypracujte samostatne iba použitím dovolených pomôcok. Prípadné nečestné konanie počas testu sa v súlade so Študijným poriadkom FMFI UK, čl. 24, ods. 5 postihuje nulovým hodnotením a môže viesť k disciplinárnemu konaniu pred pedagogickou komisiou fakulty.

Na úspešné absolvovanie testu je potrebné získať **aspoň 15 bodov zo základných úloh** (nie prémiových). Prémiové úlohy sa započítajú do celkového hodnotenia predmetu práve vtedy, keď splníte podmienku úspešného absolvovania testu.

Ak v úlohe alebo riešení nie je uvedené inak, za množinu indivíduových premenných považujeme $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{u, v, w, x, y, z, u_1, v_1, w_1, x_1, y_1, z_1, u_2, v_2, w_2, x_2, y_2, z_2, \ldots\}$.

Úloha 1. Hodnotenie: ..... / 8 b.

Sformalizujte nasledujúce tvrdenia ako ucelenú teóriu v spoločnom jazyku logiky prvého rádu:

(A_1) Každý študent má kamaráta, ktorý býva na intráku.

(A_2) Erika je študentka, ktorá sa kamaráti so všetkými matfyzákmi.

(A_3) V Mlynskej doline sú štyri intráky: Štúrák, Átriáky, Mladosť a Manželáky.

(A_4) Študent je intrákista, ak býva na intráku. Iní študenti intrákisti nie sú.

(A_5) Matfyzáci-intrákisti bývajú len na Štúráku a na Átriákoch. Tí, čo bývajú na Štúráku, sa však nekamarátia s tými, čo bývajú na Átriákoch.

(A_6) Študenti, ktorí nebývajú na intráku, bývajú na priváte.

(A_7) Žiadny študent nie je bezdomovec.

(X) Ak je vzťah kamarátstva symetrický a aspoň po jednom matfyzákovi býva na Štúráku aj na Átriákoch, tak Erika býva na priváte, ak je matfyzáčka.

Prémiová úloha 1.1. Hodnotenie: ..... / 5 b.

Dokážte *tablovým kalkulom*, že teórie $T = \{A_1, \ldots, A_7\}$ vyplýva formula X (t.j. $T \models X$).

Úloha 2. Hodnotenie: ..... / 14 b.

Majme teóriu $T = \{A_1, \ldots, A_4\}$ v prvorádovom jazyku $\mathcal{L}$ s $C_{\mathcal{L}} = \emptyset$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \{f^1\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{P^2, Q^2, R^2, S^2\}$, kde:

(A_1) $\forall x\, \forall y \big(P(f(x), y) \vee Q(x, y)\big)$,

(A_2) $\forall x\, \forall y \big(Q(x, y) \to \neg P(x, y)\big)$,

(A_3) $\forall x\, \forall y \big(P(x, y) \to Q(x, y)\big)$,

(A_4) $\exists x\, \exists y\, \forall z \big(S(x, y) \wedge Q(z, y)\big) \to \forall v\, \exists w \big(P(v, w) \vee R(w, v)\big)$.

Dokážte pomocou *rezolvencie*, že z teórie T vyplýva formula X (t.j. $T \models X$):

$$X = \exists x\, \exists y \big(\exists z\, S(x, z) \to \big(Q(x, y) \wedge R(y, x)\big)\big).$$

Úloha 3. Hodnotenie: ..... / 8 b.

Uvažujme teóriu $T = \{A_1, \dots, A_4\}$ v jazyku $\mathcal{L}$, kde $C_{\mathcal{L}} = \emptyset$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \{\text{úhlavný\_nepriateľ}^1\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{hrdina\_pre}^2, \text{nepriateľ}^2, \text{porazí}^2, \text{superhrdina}^1\}$, s formulami:

(A_1) $\forall x \big(\text{superhrdina}(x) \leftrightarrow \forall y \big(\forall z\ \text{nepriateľ}(y, z) \rightarrow \text{porazí}(x, y)\big)\big)$,

(A_2) $\forall x\, \forall y \big(\text{hrdina\_pre}(x, y) \leftrightarrow \text{porazí}(x, \text{úhlavný\_nepriateľ}(y))\big)$,

(A_3) $\exists x\ \text{superhrdina}(x) \wedge \exists x\, \forall y\ \text{nepriateľ}(x, y)$,

(A_4) $\forall x\ \text{nepriateľ}(\text{úhlavný\_nepriateľ}(x), x)$.

Nech ďalej

$$X = \forall x \big(\forall y\ \text{hrdina\_pre}(x, y) \rightarrow \text{superhrdina}(x)\big).$$

Rozhodnite, či (i) z teórie T vyplýva X, a tiež rozhodnite, či (ii) X je nezávislá od T.

Rozhodnutia zdôvodnite na základe definícií vzťahov vyplývania a nezávislosti a dokážte podľa potreby *tablom* alebo *nájdením príslušných štruktúr*.