

30. mája 2024

Meno: .....

Na vyriešenie testu máte **120 minút**.

Riešenia úloh môžu získať plné hodnotenie, iba ak je ich postup **zrozumiteľný a zdôvodnený**.

Test vypracujte samostatne iba použitím dovolených pomôcok.

Na úspešné absolvovanie testu je potrebné získať **aspoň 10 bodov**.

Ak v úlohe alebo riešení nie je uvedené inak, predpokladáme, že množina individuových premenných  $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$  každého použitého prvorádového jazyka  $\mathcal{L}$  obsahuje všetky reťazce písmen nasledované číselnými indexmi, ktoré nie sú prvkami množín  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ ,  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  a  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ .

**Úloha 1.**

Hodnotenie: ..... / 5 b.

Sformalizujte nasledujúce tvrdenia v jazyku logiky prvého rádu  $\mathcal{L}$ , kde  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Poľnoservis, psenica, ovos, 100}\}$ ,  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{obchod}^1, \text{mensi\_ako}^2, \text{predava}^2\}$  a  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \{\text{vyrobca}^1, \text{cena}^2\}$ , pričom zamýšľaný význam symbolov je:

| Predikátový symbol  | Zamýšľaný význam                 | Funkčný symbol | Zamýšľaný význam                  |
|---------------------|----------------------------------|----------------|-----------------------------------|
| obchod( $x$ )       | $x$ je obchod                    | vyrobca( $x$ ) | výrobca (tovaru) $x$              |
| mensi_ako( $x, y$ ) | $x$ je menší ako $y$             | cena( $x, y$ ) | cena (tovaru) $y$ v (obchode) $x$ |
| predava( $x, y$ )   | (obchod) $x$ predáva (tovar) $y$ |                |                                   |

Pozor: vyrobca<sup>1</sup> a cena<sup>2</sup> sú funkčné, nie predikátové symboly.

- Jeden z obchodov predáva produkty výlučne od Poľnoservisu.  
 $\exists x(\text{obchod}(x) \wedge \forall y(\text{predava}(x, y) \rightarrow \text{vyrobca}(y) \doteq \text{Poľnoservis}))$
- Všetky produkty Poľnoservisu sa všade predávajú za menej ako 100.  
 $\forall x \forall y((\text{predava}(x, y) \wedge \text{vyrobca}(y) \doteq \text{Poľnoservis}) \rightarrow \text{mensi\_ako}(\text{cena}(x, y), 100))$
- Všade, kde predávajú aj pšenicu aj ovos, je pšenica drahšia.  
 $\forall x((\text{predava}(x, \text{psenica}) \wedge \text{predava}(x, \text{ovos})) \rightarrow \text{mensi\_ako}(\text{cena}(x, \text{ovos}), \text{cena}(x, \text{psenica})))$
- V žiadnom obchode nepredávajú pšenicu a čosi od Poľnoservisu zároveň.  
 $\neg \exists x \exists y(\text{obchod}(x) \wedge \text{predava}(x, \text{psenica}) \wedge \text{predava}(x, y) \wedge \text{vyrobca}(y) \doteq \text{Poľnoservis})$
- Niekde je ovos za 100 práve vtedy, keď všade je pšenica drahšia ako 100.  
 $\exists x \text{cena}(x, \text{ovos}) \doteq 100 \leftrightarrow \forall x \text{mensi\_ako}(100, \text{cena}(x, \text{psenica}))$

*Bonus za 1 bod:* Najdrahší a najlacnejší produkt pochádzajú od toho istého výrobcu.

$$\forall l \forall g \left( \forall x_2 \forall y (y \neq l \rightarrow \exists x_1 \text{mensi\_ako}(\text{cena}(x_1, l), \text{cena}(x_2, y))) \wedge \right. \\ \left. \forall x_2 \forall y (y \neq g \rightarrow \exists x_1 \text{mensi\_ako}(\text{cena}(x_2, y), \text{cena}(x_1, g))) \rightarrow \right. \\ \left. \text{vyrobca}(l) \doteq \text{vyrobca}(g) \right) \\ \exists o \forall o_2 (o_2 \neq o \rightarrow \text{mensi\_ako}(\text{cena}(o, \text{ovos}), \text{cena}(o_2, \text{ovos}))) \\ \neg \exists p_1 \exists p_2 ((\neg \exists p \exists o(\text{mensi\_ako}(\text{cena}(o, p), \text{cena}(o_1, p_1)))) \wedge \text{vyrobca}(p_1) \neq \text{vyrobca}(p_2))$$

**Úloha 2.**

Hodnotenie: ..... / 5 b.

Majme teóriu  $T = \{A_1, \dots, A_3\}$  v jazyku  $\mathcal{L}$  logiky prvého rádu s  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{c\}$ ,  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \emptyset$ ,  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{A^2, B^1, C^2\}$ , kde:

$$A_1 = \forall x(B(x) \rightarrow (\exists y A(x, y) \vee \exists y C(y, x))), \\ A_2 = (\forall x(A(c, x) \rightarrow \exists y B(y)) \rightarrow B(c)), \\ A_3 = \forall x(C(x, x) \rightarrow \forall y(A(x, y) \rightarrow \exists z B(z))).$$

Upravte  $T$  na ekvivalentnú kauzálnu teóriu  $T' = \bigcup_{i=1}^3 T'_i$  vo vhodnom rozšírení jazyka  $\mathcal{L}$  o skolemovské konštanty a funkcie. Pre každú formulu  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , zapíšte s ňou ekvivalentnú množinu klauzúl  $T'_i$ .

Zapíšte aj kľúčové medzivýsledky úprav (NNF, premenovanie premenných, skolemizáciu, PNF). Medzivýsledok nemusíte písať, ak sa podstatne nelíši od pôvodnej formuly alebo predchádzajúceho medzivýsledku.

Každú úlohu riešte **iba** na liste s jej zadáním, alebo na novom liste vyžiadanom od učiteľov. Každý list čitateľne **podpíšte**. ..... List 1

**Úloha 3.**

Hodnotenie: ..... / 5 b.

Uvažujme klauzálnu teóriu v jazyku  $\mathcal{L}$ , kde  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{a, b, c, \text{bus99}\}$ ,  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{C^2, E^1\}$  a  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \{\text{el}^2, \text{prestup}^2\}$ :

$$T = \{ \neg C(x, y, s_1) \vee \neg C(y, z, s_2) \vee C(x, z, \text{prestup}(s_1, s_2)),$$

**Úloha 4.**

Hodnotenie: \_\_\_\_\_ / 5 b.

V jazyku  $\mathcal{L}$ , kde  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \emptyset$ ,  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \emptyset$  a  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \{f^1, g^1\}$  uvažujme teóriu:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} \forall x \, g(f(x)) \doteq x, \\ \forall x \, \forall y \, (g(x) \doteq g(y) \rightarrow x \doteq y) \end{array} \right\}$$

a formulu

$$X = \forall x \, x \doteq f(g(x)).$$

Rozhodnite, či  $T \models X$ . Vyplývanie dokážte tablom alebo vyvráťte nájdením štruktúry, ktorá je kontrapríkladom.

---