Kolmogorovská zložitosť

17.10.2013

Theorem (C nie je rekurzívna...)

Funkcia $C(x)$ ***nie je rekurzívna.*** *Navyše, neexistuje čiastočne rekurzívna fcia Φ definovaná na nekonečnej množine, ktorá je na celom svojom definičnom obore s $C(x)$ totožná.*

SPORom

- Φ PRF definovaná na nekonečnej množine, **A** nekonečná rekurzívna podmnožina $D(\Phi)$
- $\Psi(m) = \min\{x : C(x) \geq m, x \in A\}$ je totálna rekurzívna

  $//\Phi(x) = C(x)$ na A
- $C(\Psi(m)) \geq m$
- $C(\Psi(m)) \leq C_\Psi(\Psi(m)) + c_\Psi, \quad C_\Psi(\Psi(m)) \leq l(m)$

  $//\Psi(m) = x : C(x) \geq m$

$$m \leq C(\Psi(m)) \leq C_\Psi(\Psi(m)) + c_\Psi \leq l(m) + c_\Psi$$

□

Theorem (C sa dá aproximovať..)

Existuje totálna rekurzívna fcia $\Phi(t,x)$ monotónne klesajúca v t taká, že $\lim_{t\to\infty}\Phi(t,x) = C(x)$

- $\mathbf{C(x) \leq l(x) + c}$
- **každý program** p, $l(p) \leq l(x) + c$ **necháme bežať** t **krokov** a definujme

$$\Phi(t,x) = \begin{cases} \min\{l(p) : \ p \text{ zastal a vygeneroval } x\}, & \text{ak existuje} \\ l(x) + c & \text{inak} \end{cases}$$

□

Pre dané x, t NEVIEME rozhodnúť, či $\Phi(t,x) = C(x)$

Def. (limita $\Phi(t,x)$)

Nech $g = g_1, g_2, \ldots$ je postupnosť funkcií. Funkcia f je limitou postupnosti g ak $\mathbf{f(x) = \lim_{t\to\infty} g_t(x)}$

Limita je **rekurzívne uniformná**, ak $\exists$ totálna rekurzívna fcia $t(\epsilon)$

$$|\mathbf{f(x) - g_{t(\epsilon)}(x)}| \leq \epsilon \ \forall \mathbf{x}$$

$\Psi = \Psi_1, \Psi_2, \ldots \quad \Psi_t(x) = \Phi(t,x)$

- $C(x)$ **JE limitou** Ψ
- $C(x)$ **NIE JE rekurzívnou limitou** Ψ

  lebo z problému zastavenia

  $\forall \epsilon, t$ existuje nekonečne veľa x : $|C(x) - \Psi_t(x)| > \epsilon$

vlastnosti C

C je "spojitá" $\exists c: \ |C(x) - C(x \pm h)| \leq 2l(h) + c$

$\hookrightarrow$ ak máme program pre x, stačí povedať $\pm h$

C je "logaritmická"

$\hookrightarrow$ $C(x) \leq l(x) + c$

$\hookrightarrow$ $\forall k$ je počet x dĺžky n s $C(x) < \log x - k$ nanajvýš 2^{n-k}

"fluktuácia" C

$\forall \mathbf{x}\ \exists \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}: \quad |\mathbf{x_i} - \mathbf{x}| \leq \sqrt{\mathbf{x}}$, pričom

1. $\mathbf{C(x_1) \geq l(x)/2 - c}$
2. $\mathbf{C(x_2) \leq l(x)/2 + c}$

2. nestlačiteľné $x = x''x'$; $l(x'') = l(x') = n/2 \quad \rightsquigarrow$
   $\mathbf{x_2 = x''0^{n/2}}$

$$C(x_2) \leq l(x)/2 + c \sim C(x)/2$$

1. stlačiteľné x; $C(x) = o(l(x)) \rightsquigarrow$ spodné bity nahradí nestlačiteľný $y = y_1 \ldots y_{n/2}$
   $\mathbf{x_1 = x''y} \quad C(y) \geq l(y) + c = l(x)/2 + c$

Čo vieme o dlhých zložitých behoch...

1. $\forall c \exists d$: neexistuje d po sebe idúcich c-nestlačiteľných čísel

2. $\forall d \exists c$: existuje d po sebe idúcich c-nestlačiteľných čísel

Lemma

$\forall c \exists d$: ***neexistuje d po sebe idúcich c-nestlačiteľných čísel***

Majme **x** **c** – nestlačiteľné $C(x) > l(x) - c$
uvažujme $x, x+1, \ldots, x+\Delta$, $x + \Delta = i\underbrace{0 \ldots 0}_{j}$:

$$\left.\begin{array}{l} C(x+\Delta) \leq l(i) + l(j) + c \\ l(i) + l(j) + const < l(x) - c \end{array}\right\} \text{ stačí } l(j) + const < c$$

Lemma

$\forall d \exists c$: ***existuje*** d ***po sebe idúcich*** c***-nestlačiteľných čísel***

zoberme **k-nestlačiteľné** $x \quad C(x) > l(x) - k$
zo spojitosti: $\forall |x - y| \leq k : \ |C(x) - C(y)| \leq 2l(k) + \delta$

$$C(x) - 2l(k) - \delta \leq C(y) \quad \vee C(y) - 2l(k) - \delta \leq C(x)$$

$$l(x) - \underbrace{(k + 2l(k) + \delta)}_{c} < C(y)$$

□

keď náhodne zvolíme objekt očakávame, že má "typické" vlastnosti

S - priestor
P - pravdepodobnostné rozdelenie/distribúcia

test - predpis, kt. na hladine významnosti ε hovorí, pre kt. $x \in S$ hypotézu "x je typický" zamietame

kritické regióny

$\varepsilon = 2^{-m},\ m = 1, 2, \ldots,\ V \subseteq N \times S$

$V_m = \{x :\ (m, x) \in V\}$

$V_m \supseteq V_{m+1}$

$\sum_{\mathbf{x}} \{\mathbf{P}(\mathbf{x}|\mathbf{l}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}) : \mathbf{x} \in \mathbf{V_m}\} \leq \varepsilon$

//ak $x \in V_m$, tak x neprešlo testom na hladine významnosti ε

komplement V_m je $1 - \varepsilon$ interval spoľahlivosti

Example

$x = 0.x_1 \dots x_n$ s nulami na začiatku nie je náhodný:

$$x = \sum x_i 2^{-i}$$

TEST: $V_0 = \langle 0, 1 \rangle)$
$V_1 = \langle 0, 1/2)$
$V_2 = \langle 0, 1/4)$
$\dots$

$\mathbf{x = 0 \dots 0 x_{m+1} \dots x_n} \in \langle 0, 2^{-m})$
neprejde testom na hladine významnosti $\varepsilon = 2^{-m}$ $\diamond$

Example

$x = x_1 \dots x_n$ - v náhodnom reťazci je počet 0 a 1 "podobný"

$\mathbf{f_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i$

$\mathbf{g(n,m) = g}$, pričom g je najmenšie také, aby # binárnych reťazcov, pre ktoré to platí, bol nanajvýš 2^{n-m}

TEST : $\mathbf{V_m = \{x \in \{0,1\}^n : \ |2f_n - n| > g(n,m)\}}$

Definition (Efektívny test náhodnosti?)

Nech P je rekurzívne rozdelenie pravdepodobnosti na priestore $\mathbb{N}$. Totálna funkcia $\delta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je **P-test(Martin-Löf)**, ak

1. $V = \{(m, x) : \ \delta(x) \geq m\}$ **je rekurzívne vyčísliteľná**
2. $\sum_x \{P(x|l(x) = n), \ \delta(x) \geq m\} \leq 2^{-m} \quad \forall n$

$\hookrightarrow$ kritické regióny $V_m = \{x : \delta(x) \geq m\}$ sú vnorené a enumerovateľné

rovnomerné rozdelenie

$$\mathbf{L(x) = 2^{-2l(x)-1}}$$

$$\mathbf{L_n(x)} = \begin{cases} 2^{-n}, & l(x) = n \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

2. $\rightsquigarrow$

$$\sum_{x \in V_m} L_n(x) \leq 2^{-m} \qquad \rightsquigarrow \qquad d(\{x : l(x) = n, x \in V_m\}) \leq 2^{n-m}$$

Example

$x = 1x_2 1x_4 1x_6 \ldots$ **nie je náhodné vzhľadom k rovnomernému rozdeleniu**

$$\delta(x) = \begin{cases} \max\{i : x_1 = x_3 = x_5 = \ldots = x_{2i-1} = 1\}, & x_1 \neq 0 \\ 0, & x_1 = 0 \end{cases}$$

δ je TEST:

1. δ je rekurzívne vyčísliteľná
2. kritický región je malý (2^{-m})

   ak $\delta(x) = m, l(x) = n \geq 2m - 1$, tak máme

   $\begin{cases} 2^{m-1} & \text{možností (2m-1)dlhého prefixu} \\ 2^{n-(2m-1)} & \text{zvyškov} \end{cases}$

   $d(\{x : \delta(x) \geq m, l(x) = n\}) = 2^{m-1} \cdot 2^{n-(2m-1)} = 2^{n-m}$

Definition

univerzálny P-test je test $\delta_0(\cdot|P)$ taký, že ku každému P-testu δ existuje konštanta c_P taká, že $\forall x\ \delta_0(x|P) \geq \delta(x) - c_P$

binárny reťazec je náhodný vzhľadom k univerzálnemu P-testu, ak je (až na pár výnimiek) náhodný vzhľadom k ľubovoľnému testu

$\delta_0(\cdot|P)$ $U_m = \{(m, x) : \delta_0(x|P) \geq m\}$
δ $V_m = \{(m, x) : \delta(x) \geq m\}$

$$V_{m+c} \subseteq U_m$$

Ukážeme, že **univerzálny test existuje**

1. P-testy vieme enumerovať
2. iteratívna definícia univerzálneho P-testu

P-testy vieme enumerovať

zmena enumerácie $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ PRF na enumeráciu $\delta_1, \delta_2, \ldots$ P-testov

- $\Phi \rightsquigarrow \Psi$(indexy vynechané)

  Φ, Ψ majú rovnaké obory hodnôt
  ak je Ψ_n def $\rightsquigarrow \Psi_1, \ldots, \Psi_{n-1}$ tiež def

  "dovetail" - postupné simulovanie $\Phi(1), \Phi(2), \ldots$

  $$\begin{array}{ccc} \Phi(1) & & \\ \Phi(1) & \Phi(2) & \\ \Phi(1) & \Phi(2) & \Phi(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

  $\Psi(1) = \Phi(i_1)$, kde $\Phi(i_1)$ je prvý výpočet, kt. zastal

  $\ldots$

  $\Psi(j) = \Phi(i_j)$, kde $\Phi(i_2)$ je j-ty výpočet, kt. zastal

- pomocou Ψ definujeme test δ aproximovaním zospodu

pomocou Ψ definujeme test δ aproximovaním zospodu

$\delta[1..\infty]$ - pole aktuálnych hodnôt $\delta(1), \delta(2), \ldots$

1. $\delta[x] = 0 \quad \forall x;\ i \leftarrow 0;$
2. $i \leftarrow i + 1$; vypočítaj $\Psi(i)$, nech $\Psi(i) = (m, x)$;
3. if $\delta(x) \geq m$ then goto 2 else $\delta[x] \leftarrow m$;
4. if $\exists k \in \{1, 2, \ldots, m\} \quad \sum\{P(y|l(y) = l(x)) : \delta(y) \geq k\} > 2^{-k}$
   then $\delta[x] \leftarrow 0$; halt
   else goto 2.

1. $\delta[x] = 0 \quad \forall x;\ i \leftarrow 0;$
2. $i \leftarrow i + 1$; vypočítaj $\Psi(i)$, nech $\Psi(i) = (x, m)$;
3. if $\delta(x) \geq m$ then goto 2 else $\delta[x] \leftarrow m$;
4. if $\sum\{P(y|l(y) = l(x)) : \delta(y) \geq k\} > 2^{-k}$ pre nejaké $k = 1, 2, \ldots, m$
   then $\delta[x] \leftarrow 0$; halt
   else goto 2.

- ak je oborom hodnôt Ψ test $\rightsquigarrow$ neskončíme, ale zospodu ho aproximujeme
- ak Ψ diverguje$\rightsquigarrow$ neskončí a nemení vypočítané (je to enumerovateľná mn.)
- ak oborom hodnôt nie je test $\rightsquigarrow$ podmienka v kroku 4. sa niekedy splní a končíme

Ak zbehneme na $\forall\ \Phi_1, \Phi_2, \ldots$, "dostaneme" P-testy $\delta_1, \delta_2, \ldots$

Theorem (univerzálny P-test)

Nech $\delta_1, \delta_2, \ldots$ je enumerácia P-testov. Potom
$\delta_0(x|P) = \max\{\delta_y(x) - y : y \geq 1\}$ *je univerzálny P-test*

- $\delta_0(x|P)$ je totálna
- $V = \{(m, x) : \delta_0(x|P) \geq m\}$ je enumerovateľná
- kritické regióny sú dosť malé

$$\sum_{l(x)=n} \{P(x|l(x) = n) : \delta_0(x|P) \geq m\}$$
$$\leq \sum_{y=1}^{\infty} \sum_{l(x)=n} \{P(x|l(x) = n) : \delta_y(x) \geq m + y\}$$
$$\leq \sum_{y=1}^{\infty} 2^{-m-y} = 2^{-m}$$

- δ_0 majorizuje aditívne

Theorem (konkrétny univerzálny test)

$\delta_0(x|L) = l(x) - C(x|l(x)) - 1$ *je univerzálny L-test pre rovnomerné rozdelenie L.*

že je to test

- $\{(m, x) : \delta_0(x|L) \geq m\}$ je enumerovateľná
- $d(\{x : \ \delta_0(x|L) \geq m\}) \leq 2^{l(x)-m} - 1$

že je univerzálny

- $\forall \delta \ \exists c \ \ \delta_0(x|L) \geq \delta(x) - c$

že $\delta_0(x|L) = l(x) - C(x|l(x)) - 1$ je univerzálny

$A = \{z : \ \delta(z) \geq \delta(x)\}$ $x \in A(\text{fix})$; $\delta = \delta_y$ v štandardnom enumerovaní

- $y, l(x), \delta(x) \quad \rightsquigarrow$ vieme enumerovať prvky z A
- plus j-index x v $A \quad \rightsquigarrow$ máme $x \qquad //j \leq l(d(A)) \leq l(x) - \delta(x)$
  $s = 0 \ldots 01j, \quad |s| = l(x) - \delta(x)$
- $l(x), l(s) \quad \rightsquigarrow$ vieme $\delta(x)$

$$C(x|l(x)) \leq \underbrace{l(x) - \delta(x)}_{l(s)} + \underbrace{2l(y) + 1}_{y} \qquad c = 2l(y) + 2 \qquad \square$$

Definition

Vezmime $\delta_0(x|L) = l(x) - C(x|l(x)) - 1$ ako referenčný univerzálny test vzhľadom k uniformnej distribúcii L. Reťazec nazveme c-náhodný, ak $\delta_0(x|L) \leq c$

$$C(x|l(x)) \leq C(x) \leq C(x|l(x)) + 2C(l(x) - C(x|l(x))) + O(1)$$

Definition

Nekonečná postupnosť $\in \{0,1\}^*$ je **normálna**, ak $\forall k$ je frekvencia výskytu bloku y dĺžky k v limite 2^{-k}

- normálna postupnosť nie je nutne náhodná – Champernow 12345678910111213 . . .
- náhodná postupnosť je normálna

v *konečnom prípade* — každý blok malej veľkosti sa v ňom vyskytuje približne rovnako

K() - prefixná KZ; nateraz

$$\mathbf{C(x|y) \leq K(x|y) \leq C(x|y) + 2\log(C(x|y)) + 1}$$

Definition

Trieda **deficiency funkcií** $\delta : N \to N$ takých, že

$$\mathbf{K(n, \delta(n)|n - \delta(n)) \leq c_1}$$

- $n - \delta(n)$ vieme rozobrať na $n, \delta(n)$ ale aj $n, \delta(n)$ vieme zakódovať do $n - \delta(n)$
- fixneme c_1 tak, aby vyhovovalo pre bežné deficiency: $\log n, \log\log n, \sqrt{n}, \ldots$

Bloky v reťazcoch

Theorem $\exists$ konštanta c taká, že $\forall$ deficiency funkciu δ, $\forall n$ a $x \in \{0,1\}^n$

ak $\mathbf{C(x) \geq n - \delta(n)}$ tak $\left|\#_1(\mathbf{x}) - \frac{\mathbf{n}}{2}\right| \leq \sqrt{\frac{3}{2}\frac{(\delta(\mathbf{n})+\mathbf{c})\mathbf{n}}{\log \mathbf{e}}}$

Theorem $\exists$ konštanta c taká, že $\forall n$ a $x \in \{0,1\}^n$

ak $\left|\#_1(\mathbf{x}) - \frac{\mathbf{n}}{2}\right| \leq \mathbf{2}^{-\delta(\mathbf{n})-\mathbf{c}}\sqrt{\mathbf{n}}$ tak $\mathbf{C(x) \leq n - \delta(n)}$

Theorem $\exists$ konštanta c taká, že $\forall n$ a $x \in \{0,1\}^n$

ak $\left|\#_1(\mathbf{x}) - \frac{\mathbf{n}}{2}\right| = \mathbf{j}$ tak $\mathbf{C(x|n) \leq n - 1/2 \log n + K(j|n) + c}$

Theorem Nech $l(y) = \ell$, $\ell \leq \log n$. $\exists$ konštanta c tak, že $\forall n \forall x \in \{0,1\}^n$

ak $\mathbf{C(x) \geq n - \delta(n)}$ potom $|\#_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) - \mathbf{pn}| \leq \sqrt{\alpha \mathbf{pn}}$

kde $\alpha = \mathbf{[K(y|n) + \log \ell + \delta(n) + c]3\ell / \log e}$

Theorem

∃ *konštanta* c *taká, že* ∀ *deficiency funkciu* δ, ∀n *a* $x \in \{0,1\}^n$

ak $\mathbf{C(x) \geq n - \delta(n)}$ *tak* $\left|\#_1(\mathbf{x}) - \frac{\mathbf{n}}{2}\right| \leq \sqrt{\frac{3}{2}\frac{(\delta(\mathbf{n})+\mathbf{c})\mathbf{n}}{\log \mathbf{e}}}$

Chernoff $\mathbf{Pr(|S_n - pn| > m) \leq 2e^{-m^2/3pn}}$ //mince $p = 1/2$

- $A = \{x \in \{0,1\}^n : \ |\#_1(x) - n/2| > m\}, \quad d(A) \leq 2^{n+1}e^{-2m^2/3n}$
- zvolíme m tak, aby $\frac{2m^2 \log e}{3n} = \delta(\mathbf{n}) + \mathbf{c}$
- **popis** x

  - selfdelimiting **s** $\quad n - \delta(n) \rightsquigarrow \delta(n), n \quad$ $\mathbf{c_1}$

  - **i** je index x v A

$$l(i) \leq \log d(A) \leq (n+1) - (2m^2 \log e)/3n = n + 1 - \delta(n) - c$$
$$|0 \ldots 0\mathbf{si}| = n + 1 - \delta(n) - c + c_1$$

$$C(x) \leq C_T(x) + c_T \leq n + \mathbf{1} - \delta(n) - \mathbf{c} + \mathbf{c_1} + \mathbf{c_T}$$

pre $\mathbf{c = c_1 + c_T + 2}$ $\quad C(x) < n - \delta(n)$[Spor] $\qquad |\#_1(x) - n/2| \leq m \quad \square$

Theorem

$\exists$ *konštanta* c *taká, že* $\forall n$ *a* $x \in \{0,1\}^n$

$$\textit{ak} \quad \left|\#_1(\mathbf{x}) - \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{2}}\right| \leq \mathbf{2}^{-\delta(\mathbf{n})-\mathbf{c}}\sqrt{\mathbf{n}} \quad \textit{tak} \quad \mathbf{C(x)} \leq \mathbf{n} - \delta(\mathbf{n})$$

- **Zvolíme** $\mathbf{m} = \mathbf{2}^{-\delta(\mathbf{n})-\mathbf{c}}\sqrt{\mathbf{n}}$
- $A = \{x \in \{0,1\}^n : \ |\#_1(x) - n/2| \leq m\}$
  $\mathbf{d(A)} \leq (m+1)\binom{n}{n/2} \leq \mathbf{c_2}\frac{\mathbf{2^n m}}{\sqrt{\mathbf{n}}}$ Stirling $n! \approx \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$
- **i** je index x v A

  určenie $A : n, m, \delta(n) \quad \rightsquigarrow \quad n - \delta(n), c_1$

$$C_T(x) = \log(\mathbf{d(A)}) + \mathbf{c_1} = n - \delta(n) - c_1 + \log c_2$$

$$C(x) \leq C_T(x) + c_T \leq n - \delta(n)$$

Theorem

Existuje konštanta c taká, že $\forall n$ a $x \in \{0,1\}^n$

$$\textit{ak} \quad \left|\#_1(x) - \frac{n}{2}\right| = j \quad \textit{tak} \quad C(x|n) \leq n - 1/2 \log n + K(j|n) + c$$

- $A = \{x \in \{0,1\}^n : \ |\#_1(x) - n/2| = j\}$
- $d(A) \leq 2\binom{n}{n/2} \leq c_3 \frac{2^n}{\sqrt{n}}$
- i je index x v A
  –enumerácia $A \quad \rightsquigarrow \quad j, n, \ d(A)$

$$C_T(x|n) \leq \log d(A) + K(j|n) \leq n - 1/2 \log n + \log c_3 + K(j|n)$$

$$C(x|n) \leq C_T(x|n) + c_T \leq n - 1/2 \log n + K(j|n) + c$$

Theorem

Nech $l(y) = \ell$, $\ell \leq \log n$. *Existuje konštanta* c *tak, že* $\forall n \forall x \in \{0,1\}^n$
ak $\mathbf{C(x) \geq n - \delta(n)}$ *potom* $|\#_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) - \mathbf{pn}| \leq \sqrt{\alpha \mathbf{pn}}$

kde $\alpha = \mathbf{[K(y|n) + \log \ell + \delta(n) + c]3\ell / \log e}$

Nech dĺžka $x, l(x) = n$, je násobkom dĺžky $y, l(y) = \ell$ $\mathbf{n = N\ell}$

- x ako cyklický kruh, ℓ rôznych delení $\#_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{i})$ neprekrývajúce sa výskyty
- $\mathbf{A} = \{x \in \{0,1\}^n : \ |\#_y(x,i) - pN| > m\}$
- $d(A) \leq 2^{n+1} e^{-m^2/3pN}$
  zvolíme m tak aby $\frac{\mathbf{m^2 \log e}}{\mathbf{3pN}} = \mathbf{K(\langle y, i \rangle | n) + \delta(n) + c}$
- **enumerácia A** $i, y, m \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{K(\langle y, i, \delta(n), n \rangle | n - \delta(n)) \leq K(\langle y, i \rangle | n) + c_1}$
- **index** i **prvku** x **v** A

$$\log d(A) \leq \log(2^{n+1} e^{-m^2/3pN}) = n+1 - \frac{m^2 \log e}{3pN} \leq n+1 - K(\langle y, i \rangle | n) - \delta(n) - c$$

$$C(x) \leq C_T(x) + c_T \leq n + 1 - \delta(n) - c + c_1 + c_T$$

pre $c = c_1 + c_T + 2 \quad C(x) < n - \delta(n)$ $\quad |\#_y(x,i) - pN| \leq m$

$$|\#_y(x,i) - pN| \le m \qquad \frac{m^2 \log e}{3pN} = K(\langle y,i\rangle|n) + \delta(n) + \mathbf{c}$$

- $|\#_y(x,i) - pN| \le \sqrt{\frac{K(\langle y,i\rangle|n)+\delta(n)+c}{\log e} \cdot 3pN}$
- $K(\langle y,i\rangle|n) \le K(y|n) + K(i|n) + O(1); \quad K(i|n) \le \log \ell + O(1)$
- $|\#_y(x) - pn| = \sum_{i=0}^{\ell-1} |\#_y(x,i) - pN| \le \ell\sqrt{\frac{K(y,|n)+\log \ell+\delta(n)+c}{\log e} \cdot 3p\frac{n}{\ell}}$

$$|\#_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) - \mathbf{pn}| \le \sqrt{\alpha \mathbf{pn}}, \alpha = [\mathbf{K(y|n)} + \log \ell + \delta(\mathbf{n}) + \mathbf{c}]\mathbf{3}\ell/\log \mathbf{e} \quad \square$$