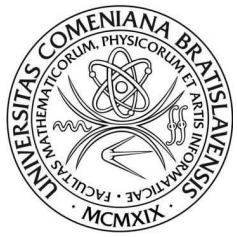
U N I V E R Z I T A K O M E N S K É H O

Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky

Katedra Informatiky



Úvod do riešenia ťažkých problémov

Pomocné texty k prednáške 2-UIN-260

(verzia 6. mája 2011)

Bratislava, 2010 Dana Pardubská

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Pod ťažkými problémami nemáme na mysli len NP-ťažké, ale aj tie, pre ktoré nepoznáme polynomiálne algoritmy rozumného stupňa. Aké máme možnosti, keď chceme riešiť ťažké problémy deterministicky? Odpoveď záleží aj od odpovede na otázku, v čom spočíva obtiažnosť toho problému. Je problém, resp. algoritmus na jeho rešenie, zlý preto, že má niektoré zlé vstupy, alebo je zlý "vo svojej podstate"?

1. V prvom prípade máme šancu, že naše vstupy budú patriť do kategórie "vhodných" a pre ne môže existovať dobrý algoritmus. A tak sa tam, kde sa to dá, popri snahe o znižovanie zložitosti najhoršieho a priemerného prípadu snažíme (aj) o konštrukciu takých algoritmov, ktoré umožňujú vyšpecifikovať veľké/čo najväčšie množiny vstupov, na ktorých sú dokázateľné rozumné.

2. Akceptujeme exponenciálnu zložitosť najhoršieho prípadu, keď na rozumných vstupoch (dajú sa v praktických situáciách očakávať) je rozumnej zložitosti.

3. Konštruujeme exponenciálne algoritmy, dokonca aj v očakávanom prípade, ale snažíme sa znižovať tú exponencialitu (od 2^n ideme napr. k $(1.2)^n$)

4. Upustíme od toho, že náš algoritmus má na všetkých vstupoch vždy vyriešiť náš problém korektne. Dostávame dve významné triedy algoritmov. Ak v rozhodovacích problémoch pripustíme, že odpoveď je správne len s veľkou pravdepodobnosťou, môžme používať tzv. pravdepodobnostné (náhodou riadené,randomized) algoritmy. V prípade optimalizačných úloh vedie upustenie od presnosti k tzv. aproximačným algoritmom. Vyžadujeme, aby algoritmus bol rýchly a získané riešenie blízko k optimálnemu riešeniu. Často sa takto získané riešenia berú ako dobrý štart pre ďalšie metódy.

Kapitola 2

Deterministické metódy na riešenie ťažkých problémov

V tejto časti sa budeme venovať deterministickým metódam na riešenie ťažkých problémov. S výnimkou heuristík pôjde o riešenie korektné na celej množine definičného oboru. Jednotiacim aspektom metód z častí 2.1, 2.2 je spoločná snaha o vyjadrenie zložitosti algoritmu vzhľadom na kvalitu vstupu, nielen jeho veľkosť. V častiach 2.3, 2.6, 2.7 sa venujeme rôznym prístupom k zmenšovaniu prehľadávanej časti stavového priestoru; zmenšenie nevieme dokázať, máme racionálne dôvody sa nazdávať, že k nemu dôjde. Časť 2.4 sa venujeme znižovaniu najhoršieho prípadu exponenciálnych algoritmov a napokon v časti 4.5 sa venujeme aplikácii lineárneho programovania pri riešení rôznych problémov.

2.1 Algoritmy pseudopolynomiálnej časovej zložitosti

Začnime problémom plnenia batoha(knapsack problem). Tento problém je NP-ťažký, čo za predpokladu $\mathsf{PP} \neq \mathsf{NP}$ znamená, že preň neexistuje efektívny polynomiálny algoritmus. Ukážeme, že využitie metódy dynamického programovania vedie k algoritmu, ktorého zložitosť podstatne závisí nielen od veľkosti vstupu, ale aj od konkrétnych hodnôt na vstupe. Dostaneme sa tak k pojmu pseudopolynomiálneho algoritmu. Na záver zadefinujeme pojem silno NP-ťažkého problému a ukážeme/vysvetlíme, že pre silno NP-ťažké problémy pseudopolynomiálne algoritmy neexistujú.

Plnenie batohu

Vstup: $(w_1, \ldots, w_n, c_1, \ldots, c_n, b), n \in \mathbb{N}/\{0\}$
b je kapacita batoha
w_i sú váhy
c_i sú profity.
Cieľ: $\max \sum_i x_i c_i$ pri zachovaní $\sum_i x_i w_i \leq b$

Triviálne riešenie exponenciálnej zložitosti je založené na *metóde hrubej sily* – vygeneruj všetky potenciálne podmnožiny objektov a vyber tú, ktorá prináša maximálny zisk. Vylepšenie prináša využitie metódy dynamického programovania, keď budeme postupne predlžovať vstup a budeme počítať, aké rôzne profity pri takomto vstupe môžme dosiahnuť. Pre každý potenciálny dosiahnuteľný profit si budeme pamätať tú konkrétnu podmnožinu, ktorá ho dosahuje s minimálnou váhou.

Uvedomme si, že zatiaľ čo všetkých možných riešení (z hľadiska obsahu batohu) je 2^n, z hľadiska možného zisku je to $n \cdot \max\{c_1, \ldots, c_n\}$. Označme preto

$\mathbf{C} = \max\{c_1, \ldots, c_n\}$

$\mathbf{S_{i,c}}, i \in \{1, \ldots, n\},\ c \in \{0, \ldots, nC\}$ podmnožinu objektov $\{1, \ldots, i\}$, ktorých celkový zisk je c pri *minimálnej váhe*

W(i,c) súčet váh objektov z $S_{i,c}$; kladieme $W(i,c) = \infty$ v prípade, že množina $S_{i,c}$ neexistuje

Nasledujúci vzťah je základom pre použitie *dynamického programovania*.

$$W(i+1,c) = \begin{cases} \min\{W(i,c), w_{i+1} + W(i, c - c_{i+1})\} & c_{i+1} \leq c \\ W(i,c) & \text{inak} \end{cases}$$

Optimálne riešenie má cenu B, kde $B = \max\{c \mid W(n,c) \leq b\}$.

Algoritmus 1 DPKP - Knapsack

```
1: W(1,0) ← 0
2: for c:=1 to nC do
3:     if c=c_1 then W(1,c) ← v_1; S_{1,c} ← {1}
4:     else W(1,c) ← ∞; S_{1,c} ← ∅
5: for i=1 to n-1 do
6:     W(i+1,0) ← 0
7:     for c=1 to nC do
8:         if c_{i+1} ≤ c then W(i+1,c) ← min{W(i,c), w_{i+1} + W(i,c-c_{i+1})}
9:         else W(i+1,c) ← W(i,c)
10:        if W(i+1,c) = W(i,c) thenS_{i+1,c} ← S_{i,c}
11:        else S_{i+1,c} ← S_{i,c} ∪ {i+1}
12: B ← max{c | W(n,c) ≤ b}
13: S ← S_{n,c}, pre ktorú W(n,c) = B
14: return (B,S)
```

Zložitosť algoritmu je $O(n \cdot nC)$. Ak označíme $MaxInt(x)$ maximálnu hodnotu zo vstupu x, tak $n \leq |x|$ a $C \leq MaxInt(x)$. Zložitosť teda môžme vyjadriť ako $Time_{DPKP}(x) = O(|x|^2 \cdot MaxInt(x))$.

□

Dostali sme sa k pojmu pseudopolynomiálneho algoritmu. Niekedy sa zložitosť algoritmu dá vyjadriť ako funkcia hodnôt, ktoré vstupné parametre môžu nadobúdať. Ak by sme *veľkosť hodnoty* vstupných parametrov uvažovali ako *premennú*, vzhľadom na ktorú vyjadrujeme zložitosť algoritmov, dostaneme často algoritmus polynomiálnej zložitosti. Vieme však, ze keďže vo všeobecnosti hodnoty premenných môžu byť až exponenciálne vzhľadom na veľkosť vstupu, dostávame tak algoritmy v najhoršom prípade exponenciálnej zložitosti. Napriek tomu majú algoritmy, ktoré sú polynomiálne vzhľadom na veľkosť hodnoty vstupných premenných veľkých význam – pretože sú polynomiálne pre veľkú množinu vstupov.

Pri formálnejšom vysvetlení pojmu pseudopolynomiálneho algoritmu sa sústredíme na problémy, ktorých vstupy možno chápať ako celočíselné. Budeme ich kódovať binárne, oddeľovačom bude #.

Nech $x = x_1\#x_2\#\ldots\#x_n$, $x_i \in \{0,1\}^+$ je reťazec, $y \in \{0,1\}^*$ binárny reťazec. Potom

Num(**y**) označuje číslo s binárnym zápisom y
Int(**x**) $= (Num(x_1), \ldots, Num(x_n))$
MaxInt(**x**) $= \max\{Num(x_i) \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$

Majme teda problém, ktorý je definovaný na veľkej množine vstupov. Stretli sme sa s tým, že pre rôzne podmnožiny množiny vstupov sa z hľadiska zložitosti ten-ktorý algoritmus správa rôzne, niekedy dokonca podstatne rôzne[1]. Niekedy je dokonca problém na rôznych množinách vstupov rôzne obtiažny, napr. problém plnenia batoha je v množine racionálnych čísel greey metódou riešiteľný v polynomiálnom čase, zatiaľ čo jeho riešenie v množine $\{0,1\}$ je NP-ťažké. Nás teraz bude zaujímať obmedzenie množiny vstupov podľa ich hodnoty. Ukážeme, že pre niektoré problémy je zložitosť problému spôsobená hodnotami vstupov, zatiaľ čo pre iné problémy hodnoty vstupných premenných zložitosť podstatne neovplyvňujú. Je zrejmé, že problémy prvého typu sú pre nás priaznivejšie, lebo vytvárajú možnosť existencie efektívneho algoritmu pre dostatočne veľkú množinu vstupov.

Definícia 2.1 *Hovoríme, že algoritmus A je* pseudopolynomiálnej zložitosti*, ak pre jeho zložitosť $T_A(n)$ platí* *pseudopolynomiálny algoritmus*

$$T_A(x) = O(p(|x|, MaxInt(x)))$$

Inými slovami povedané je algoritmus polynomiálny pre celočíselné vstupy, ktoré sú zadávané unárne. Z definície je zrejmé, že pseudopolynomiálny algoritmus je efektívny, keď maximálna hodnota na vstupe je rozumná, ohraničená rozumnou funkciou. Toto ohraničenie vstupov formálne zachytáva pojem zúženia problému.

Definícia 2.2 *Nech U je problém s celočíselnými vstupmi, h neklesajúca funkcia z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$. Potom $h-$*zúžením problému *U je problém, ktorý vznikne z U tak, že množinu vstupov zredukujeme na tie, pre ktoré $MaxInt(x) \leq h(|x|)$.* *h-zúženie U*

Význam tejto definície je sformulovaný v nasledujúcej vete.

Veta 2.1 *Nech U je problém s celočíselnými vstupmi, A pseudopolynomiálny algoritmus, ktorý ho rieši. Potom pre každý* polynóm *h existuje polynomiálny algoritmus na riešenie $h-$zúženia U.*

Dôkaz: Keďže A je pseudopolynomiálny algoritmus, existuje polynóm p dvoch premenných $|x|, MaxInt(x)$ taký, že $Time_A(x) = O(p(|x|, MaxInt(x)))$ pre každý vstup x do U. Keďže $MaxInt(x) \in O(|x|^c)$ pre vstupy z $h-$zúženia U, teda s $h(n) = O(n^c)$, je A polynomiálny algoritmus pre h-zúženie U.

□

Pseudopolynomiálne algoritmy nie sú všeliekom na riešenie ťažkých problémov. Rozumné riešenie môžu poskytovať pre problémy s celočíselnými vstupmi, ktorých zložitosť podstatne závisí od *hodnôt* vstupov. Jednou z tried problémov, pre ktoré pseudopolynomiálne algoritmy rozumné riešenie neposkytujú, sú tzv. silno NP-ťažké problémy. *Limity aplikovateľnosti*

Definícia 2.3 *Hovoríme, že problém U je* silno NP-ťažký*, ak existuje polynóm p taký, že $p-$zúženie U je NP-ťažký problém.* *silno NP-ťažký problém*

[1] Rozdiel medzi zložitosťou najlepšieho a najhoršieho prípadu,...

Silno NP-ťažké problémy patria v triede ťažkých problémov k tým ťažším. Ich obtiažnosť je v samotnom probléme, nie vo veľkých hodnotách čísel, s ktorými sa pracuje.

Veta 2.2 *Nech $P \neq NP$, U je silno NP-ťažký problém s celočíselnými vstupmi. Potom* neexistuje *algoritmus pseudopolynomiálnej zložitosti riešiaci U.*

Dôkaz: triviálne vyplýva z Vety 2.1 Ak teda chceme o nejakom celočíselnom probléme U ukázať, že je veľmi ťažký, stačí vyargumentovať, že preň *neexistuje* pseudopolynomiálny algoritmus. Na základe Vety 2.2 teda stačí pre $h-$zúženie U ukázať, že je NP-ťažký pre polynóm h (zredukujeme naň nejaký NPU, alebo NP-ťažký problém U'). Táto redukcia potom implikuje, že existencia pseudopolynomiálneho algoritmu pre pôvodný problém u by znamenala existenciu polynomiálneho algoritmu pre tento NP-úplný/ NP-ťažký problém U'.

□

Príkladom je problém obchodného cestujúceho(TSP)[2]. Označme $TSP(K_n, c)$ problém obchodného cestujúceho, ktorého vstupným grafom je úplný graf K_n na n vrcholoch, a ktorého hrany sú ohodotené cenovou funkciou $c : E \longrightarrow \mathbb{N}$.

Veta 2.3 *TSP je silno NP-ťažký.*

Dôkaz: Prevedieme redukciu problému HK na TSP. Ku grafu $G = (V, E)$ spravíme ohodnotený graf tak, že

$$c(e) = \begin{cases} 1, & e \in E \\ 2, & e \notin E \end{cases}$$

Ľahko vidno, že graf G obsahuje HK práve vtedy keď pre hodnotu optimálneho riešenia $OPT_{TSP}(K_n, c)$ platí $OPT_{TSP}(K_n, c) = n$.

□

2.2 Parametrizovaná zložitosť

Hlavnou ideou parametrizovanej zložitosti je precíznejšia analýza vstupu a na jej základe vyjadrenie zložitosti ako funkcie viacerých parametrov. Pomocou týchto parametrov sa snažíme vymedziť skupinu vstupov, ktoré sú daným algoritmom zvládnuteľné. Rozdelíme teda vstupy do skupín podľa hodnoty nejakého parametra tak, že algoritmus bude polynomiálny od veľkosti vstupu, ale možno nie od tohto zvoleného parametra. Napr. pre vstup s parametrami (n, k) dostaneme zložitosť $2^k n$. Pre malé hodnoty k je $2^k n$ akceptovateľná zložitosť.

parametrizácia

Definícia 2.4 *Nech U je výpočtový problém, I množina všetkých jeho (prípustných) vstupov.* Parametrizáciou U *nazývame funkciu $Par : I \longrightarrow \mathbb{N}$ takú, že*

1. *Par je vypočitateľná v polynomiálnom čase*
2. *pre nekonečne veľa $k \in \mathbb{N}$ je $Set_U(k) = \{x \in I \mid Par(x) = k\}$* nekonečná.

Uvedomme si, že hodnota parametra "nezávisí" od veľkosti vstupu v tom zmysle, že rovnakú hodnotu tohto parametra môžu mať vstupy ľubovoľých veľkostí – napr. stupeň grafu, maximálny profit pri probléme plnenia batoha, ...

Parametrizáciu Par využijeme pri vyjadrení zložtosti algoritmu:

Par-parametrizovaný polynomiálny algoritmus

Definícia 2.5 *Hovoríme, že A je Par* -parametrizovaný polynomiálny algoritmus *pre U, ak*

1. *A rieši U*
2. *existuje polynóm p a funkcia $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ taká, že $\forall x \in I : TimeA(x) \leq f(Par(x))p(|x|)$*

Pri konštrukcii algoritmov sa snažíme o nízky stupeň polynómu p a pripúšťame superpolynomialitu funkcie f. Vidíme, že p hovorí o zložitosti algoritmu pri fixovaných parametroch, f určuje, pre aké hodnoty parametra je problém zvládnuteľný(tractable).

Príklad 2.1 *Uvažujme problém vrcholové pokrytia (VC), o ktorom vieme, že je to NP-úplný problém. Ukážeme dva rôzne prístupy k riešeniu tohto problému.*

vrcholové pokrytie

prístup I

Nech vstupom je graf $G = (V, E)$ a hodnota $k \in \mathbb{N}$. Za parameter (parametrizáciu) vezmime mohutnosť vrcholového pokrytia k. Algoritmus je založený na dvoch jednoduchých pozorovaniach/faktoch.

Fakt 2.4 *Ak má graf $G = (V, E)$ vrcholové pokrytie S mohutnosti k, tak S obsahuje všetky vrcholy stupňa aspoň $k + 1$.*

Fakt 2.5 *Ak G má vrcholové pokrytie mohutnosti m a stupeň grafu je zhora ohraničený k, tak G má nanajvýš $m(k + 1)$ vrcholov.*

Využijeme tieto fakty v nasledujúcom algoritme – najprv do S dáme všetky vrcholy, ktoré majú príslušne veľký stupeň, potom "nahrubo" (backtrackom) doprezeráme zvyšok. Veľkosť zvyšku vieme ohraničiť na základe faktu 2.5

Algoritmus 2 VC-I

//vstupom je graf G a prirodzené číslo k

1: $S \leftarrow \{v \in V, k \leq deg(v)\}$
2: **if** $|S| > k$ **then** reject
3: **else** $m \leftarrow k - |S|; G' \leftarrow G_{V/S}$
4: **if** $|V - S| > m(k + 1)$ **then** reject
5: backtrackom na G' hľadaj VC mohutnosti nanajvýš m (uvedom si, že stupeň grafu G' je zhora ohraničený k)
6: **if** existuje **then** accept
7: **else** reject

Pozrime sa na zložitosť tohto algoritmu.
1 $O(n)$
4 $O(1)$
5 Hľadáme vrcholové pokrytie mohutnosti m v grafe, ktorý má maximálne $m(k+1) \leq k(k+1)$ vrcholov (fakt 2.5). Počet operácií je O(maximálny počet hrán $\times$ počet možností pre to pokrytie)

$$O\left(k \cdot m(k+1)\binom{m(k+1)}{m}\right) \subseteq O\left(k^3\binom{k(k+1)}{k}\right) \subseteq O(k^{2k})$$

Zhrnutím dostávame

Veta 2.6 *Algoritmus VC-I je Par-parametrizovaný polynomiálny algoritmus pre problém vrcholového pokrytia.*

Iným prístupom k riešeniu problému vrcholového pokrytia je využitie metódy roz- *prístup II*
deľuj a panuj v kombinácii s nasledujúcim faktom.

Fakt 2.7 *Nech $G = (V, E)$ je graf, $e = (u, v) \in E$. Potom každé vrcholové pokrytie obsahuje aspoň jeden z vrcholov u, v.*

Idea je veľmi jednoduchá - nech $G = (V, E), k \in \mathbb{N}$ je vstup, $(v_1, v_2) \in E$ ľubovoľná hrana. Označme $G(i)$ ten graf, ktorý vznikne z grafu G vynechaním vrchola v_i a s ním incidentných hrán. Zrejme:

$$(G, k) \in VC \iff [(G(1), k-1) \in VC \vee (G(2), k-1)VC]$$

Takže rekurzívne dostávame zložitosť $O(2^k n)$.

[2]Pre daný orientovaný graf s hranami ohodnotenými nezápornými číslami chceme nájsť takú HK, ktorej cena°(teda súčet hrán)°je minimálna.

2.3 Metódy založené na prehľadávaní stavového priestoru

Uvažujme taký typ úloh, ktoré možno charakterizovať nasledovným spôsobom. Výstupom úlohy je n-tica (množina n-tíc, prípadne postupnosť), ktorá spĺňa nejaké ohraničenia. Pritom požadované riešenie možno napísať v tvare $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde $x_i \in S_i$, kde S_i je **konečná** množina.

n dám na šachovnici

Príklad 2.2 ***Problém n-dám.*** *Na šachovnicu $n \times n$ chceme umiestniť n dám tak, aby v každom riadku a v každom stĺpci stála dáma a aby sa navzájom neohrozovali. Riešenie hľadáme vo forme vektora dĺžky n, kde na s-tej pozícii je číslo riadku, v ktorom je v s-tom stĺpci umiestnená dáma.*

Iným, nevhodným problémom, je aj problém triedenia, ktorý možno naformulovať aj takto: keď triedime n-prvkovú množinu, výsledkom môže byť n-tica indexov $i_1, i_2, \ldots, i_n$, kde i_j je index j-teho najmenšieho prvku zo vstupu.

Všetky potenciálne n-tice tvoria potenciálny *stavový priestor* úlohy/*priestor riešení*. Vďaka konečnosti jednotlivých množín S_i je tento priestor konečný. Keďže však stavový priestor úlohy obsahuje minimálne všetky potenciálne riešenia, je jeho veľkosť aspoň $|S_1| \cdot |S_2| \cdot \ldots \cdot |S_m|$.

Konečnosť priestoru riešení umožňuje hľadať požadované riešenie napríklad

metódou hrubej sily – vygenerujeme všetky prípustné riešenia a z nich vyberieme tie, ktoré spĺňajú nami požadované požiadavky. Zložitosť je určite aspoň veľkosť stavového priestoru, čo je veľa.

Budeme sa snažiť vektor budovať postupne, pričom pre každý vygenerovaný začiatok vektora zistíme, či sa dá predĺžiť na riešenie. Má to tú výhodu, že ak pre nejaký začiatok $x_1, x_2, \ldots, x_k$ zistíme, že sa nedá predĺžiť, potom minimálne

$$|S_{k+1}| \cdot \ldots \cdot |S_n|$$

prípadov nemusíme generovať.

Podmienky, ktoré má riešenie spĺňať, sú väčšinou dvojakého charakteru

– *explicitné*, ktoré hovoria o x_i ako takom. Špecifikujú hodnoty, ktoré môže x_i nadobúdať ($x_i \in S_i, x_i \leq 20, \ldots$). Tieto podmienky definujú stavový priestor problému

– *implicitné*, ktoré hovoria o vzťahu jednotlivých x_i medzi sebou (dámy sa nemajú ohrozovať, ...), resp. ktoré spĺňajú nejakú ohraničujúcu funkciu

čiastočné súčty

Príklad 2.3 ***Problém čiastočných súčtov***

Vstup: $w_1, w_2, \ldots, w_n,\ M; w_i, M \geq 0$
Výstup: *množina indexov $J = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ takých, že $\sum_{t \in J} w_t = M$.*

Čo sú *explicitné* podmienky? $1 \leq i_j \leq n$

Implicitné podmienky sa viažu na medzisúčty: $\sum_{t=i_1}^{i_j} w_t \leq M$

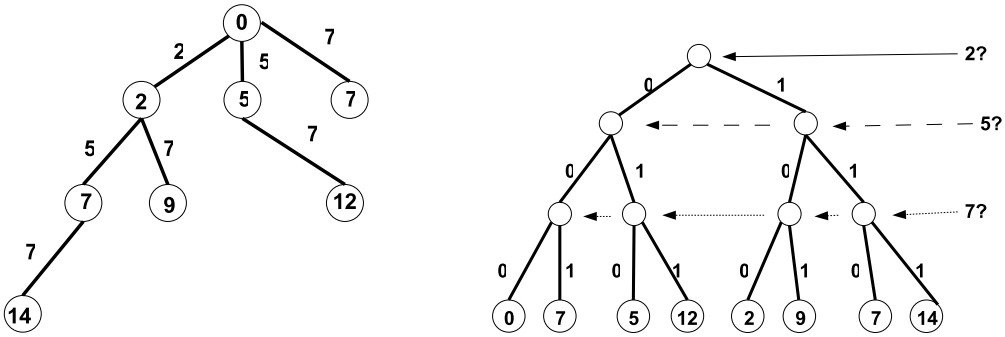
Kvôli efektívnosti algoritmov pri **prehľadávaní stavového priestoru** vyžadujeme **systematickosť** + **efektívnosť**, čo vedie k použitiu **stromov**.

Zamyslime sa nad tým, ako máme **organizovať** strom stavového priestoru[3]

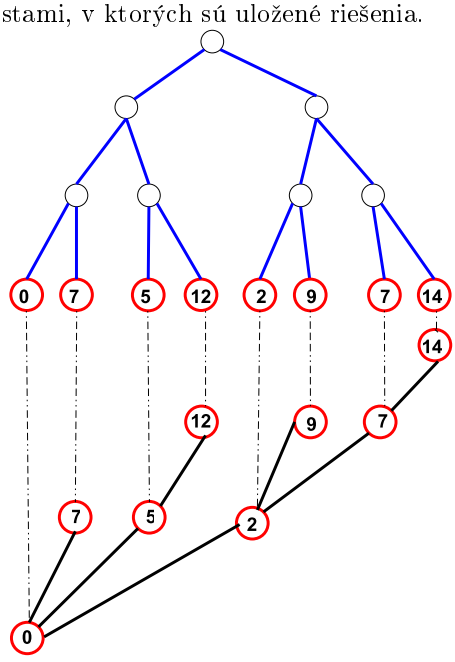
typ stromu

statický : konštrukcia stromu nezávisí od konkrétneho vstupu; vrchol vyzerá na každej úrovni rovnako – na i-tej úrovni rozhodujeme o zaradení alebo nezaradení w_i do príslušnej sumy. Každý vnútorný vrchol má teda práve dvoch synov. Riešeniu odpovedá cesta z koreňa do príslušného listu

dynamický : konštrukcia stromu je závislá na vstupe; "vzhľad" vrcholov sa líši s úrovňou v strome. Napr: ak budeme (bez ujmy na všeobecnosti) predpokladať, že $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k$, tak vrchol, do ktorého sme prišli po hrane označenej h má $n-h$ synov, do ktorých ideme po hranách $h+1, h+2, \ldots, n$. V tomto prípade potenciálnemu riešeniu odpovedá každý vrchol vytvoreného stromu.



Na obrázku vidíme dynamický (vľavo) a statický (vpravo) strom pre problém čiastočných súčtov pri vstupe $w_1 = 2, w_2 = 5, w_3 = 7$. V prípade dynamického stromu tvoria potenciálne riešenia vrcholy, ktoré sú pospájané do stromu. Statický strom je vybudovaný *nad* listami, v ktorých sú uložené riešenia.



Keď máme predstavu o tom, ako by vyzeral strom stavového priestoru problému, musíme systematicky "generovať" vrcholy tohto stromu. K lepšiemu popisu budeme uvažovať 3 kategórie vrcholov:

kategórie vrcholov

[3] Strom stavového priestoru nevytvoríme na začiatku; jeho časti budeme v priebehu prehľadávania generovať, resp. navštevovať.

E(expand) – vrchol, ktorý sa práve vybral na spracovanie

L(live) – živý vrchol, teda taký, ktorý sme už vygenerovali, ale ešte sa doň budeme vracať

D(dead) – mŕtvy vrchol, ktorý už má spracované všetky deti, resp. sme zistili, že sa z neho nevieme dostať do prípustného riešenia.

"Notoricky známe" sú dva systematické postupy prehľadávania stromov a grafov. Z nich vychádzajú aj dve základné metódy:

Branch & Bound	Backtracking
⇓	⇓
do šírky + orezanie	do hĺbky + orezanie

2.3.1 Backtracking-prehľadávanie s návratom

Spomedzi "priestor prehľadávajúcich metód" začneme s metódou prehľadávania s návratom – tzv. backtrackingom.

metóda

Nech $T(X(1),\ldots,X(k-1))$ je množina potenciálnych hodnôt pre $X(k)$

$B_k(X(1),\ldots,X(k))$ je booleovská funkcia, ktorá dáva hodnotu true práve vtedy keď $X(1),...,X(k)$ je alebo môže byť predĺžené na riešenie.

Potom metódu možno schématicky znázorniť algoritmom 3. Efektívnosť tejto metódy zrejme záleží od
- výpočtu $T(\cdot)$, mohutnosti $T(\cdot)$
- výpočtu $B_k(\cdot)$, počtu prvkov, spĺňajúcich $B_k(\cdot)$.

Algoritmus 3 BACKTRACK

```
1: k ← 1
2: while k > 0 do
3:     if ∃ X(k); X(k) ∈ T(X(1),...,X(k−1)) a B_k(X(1),...,X(k)) then
4:         if X(1),...,X(k) je cesta do odpoveďového vrchola then
5:             return X(1),...,X(k)
6:         k ← k + 1
7:     else k ← k − 1
```

Zamyslime sa nad tým, či a ako môžme ovplyvniť počet vrcholov stromu, ktoré pri prehľadávaní stavového priestoru vygenerujeme.

skúšame zmenšiť veľkosť prezretého priestoru

- ak nezáleží na poradí doplňaných položiek výsledného vektora, zdá sa rozumné generovať položky v poradí, ktoré zodpovedá neklesajúcemu usporiadaniu mohutností príslušných S_i. Intuícia za tým – ak zistíme, že sa prvých k položiek *nedá* doplniť na riešenie, potom $S(k,m) = |S_{k+1}| \cdot \ldots \cdot |S_m|$ prípadov nemusíme generovať. Chceli by sme, aby $S(k,m)$ bolo čo možno najväčšie číslo.

- pre zvolenú postupnosť $i_1, i_2, \ldots, i_n$ skúsime odhadnúť, koľko vrcholov bude treba vygenerovať. Ako? Nech pre vrchol v hĺbke 1 vygenerujeme m_1 synov spĺňajúcich B_1. Náhodne sa presuňme do jedného z nich a zistime, koľko má synov, spĺňajúcich B_2. Nech je to $m_2 \ldots$ Nech m_i je počet synov vrchola v

hĺbke i, ktorí spĺňajú B_i. Potom počet vygenerovaných vrcholov odhadneme ako

$$m_1 + m_1m_2 + m_1m_2m_3 + \ldots + m_1m_2 \ldots m_{n-1}$$

Zopakovaním pre niekoľko zvolených permutácií môžme vybrať tú permutáciu, pre ktorú nám odhad vychádza najlepšie.

opäť problém súčtov

Vráťme sa k problému čiastočných súčtov. Predpokladáme, že

$$w_1 \leq w_2 \leq \ldots \leq w_n, M \in \mathbb{N}$$

Budeme aplikovať statický prístup. Hľadáme teda vektor dĺžky n, ktorého i-ta položka hovorí o prítomnosti, resp. neprítomnosti w_i v súčte. Ako bude vyzerať ohraničujúca funkcia?

Predpokladajme, že $\sum_{i=1}^{k-1} x_i w_i < M$

- Kedy môžme uvažovať, že $\mathbf{x_k = 1}$?
  - Ak $\sum_{i=1}^{k} w_i x_i \leq M$ a $\sum_{i=1}^{k} w_i x_i + \sum_{i=k+1}^{n} w_i \geq M$, tak áno
  - Ak $\sum_{i=1}^{k} w_i x_i < M$ a $\sum_{i=1}^{k} w_i x_i + w_{k+1} > M$, vtedy možnosť $x_k = 1$ nemôže viesť k riešeniu a preto ju neaplikujeme.

- Kedy môžme uvažovať, že $\mathbf{x_k = 0}$?
  Vtedy, ak $\sum_{i=1}^{k-1} w_i x_i + \sum_{i=k+1}^{n} w_i \geq M$

Označme

$$s = \sum_{i=1}^{k-1} w_i x_i \qquad r = \sum_{i=k+1}^{n} w_i$$

Algoritmus 4 SumSub(s,k,r)

```
x(k) ← 1;
if s+w(k) = M then return (x(1), ..., x(k))
else if s + w(k) + w(k+1) ≤ M then
    SumSub(s+w(k), k+1, r-w(k))
if s+r-w(k)≥ M a s+w(k+1) ≤ M then
    X(k) ← 0
    Sum-of-sub(s,k+1,r-w(k))
```

2.3.2 LC Branch and Bound

Backtracking je vlastne prehľadávanie do hĺbky s orezaním. Ak prehľadávanie stavového priestoru do hĺbky nahradíme prehľadávaním do šírky, pričom orezanie zachováme, dostaneme metódu, ktorej sa anglicky hovorí *Branch-and-Bound*.

ohodnocujeme vrcholy

Prehľadávanie do hĺbky i do šírky sú vlastne "slepé" metódy – postup prehľadávania je daný dopredu a príliš nezohľadňuje kvalitu získavaného riešenia. Metóda LC Branch and Bound (LC-B&B)[4] sa snaží túto "sleposť" odstrániť. Riešenie spočíva v určení inteligentnej funkcie $c(x)$, ktorou ohodnotíme živé vrcholy. Hodnotu tejto funkcie potom využijeme pri voľbe nového E-vrchola.

[4] Least Cost Branch and Bound

Zamyslime sa, čo by táto funkcia mala odrážať/zohľadňovať? Ideálne by bolo, keby hovorila o úsilí, ktoré ešte treba vynaložiť na to, aby sme sa z daného vrchola dostali k odpovedi (resp. o hodnote/kvalite účelovej funkcie, ktorú z daného vrchola môžme dosiahnuť).

- počet vrcholov, ktoré ešte treba vygenerovať
- počet úrovní, ktoré nás delia od odpovede

Ak by sme na ohodnocovanie použili jednu z vyššie spomenutých funkcií, na výpočet presnej hodnoty by sme potrebovali prezrieť celý stavový priestor, preto budeme používať radšej len odhad.

$\widehat{c}(x) = f(h(x)) + \widehat{g}(x)$, kde
$h(x)$ je cena dosiahnutia x z koreňa
$f()$ je nejaká neklesajúca funkcia
$\widehat{g}(x)$ je odhad úsilia do najbližšieho odpoveďového listu

Ak zvolíme $f(x) = 0$, tak vlastne vôbec neuvažujeme úsilie vynaložené na príchod do vrchola. Zodpovedá to tomu, že celkom prirodzene predpokladáme, že $\widehat{g}(x) \leq \widehat{g}(y)$ ak x je synom y. Pritom sa snažíme ísť stále hlbšie a hlbšie a do vedľajšieho podstromu sa už nikdy nedostaneme. Keby $\widehat{g}(x)$ bola reálna hodnota a nie len odhad, bol by to dobrý prístup. Preto $f(x) \neq 0$ dáva možnosť prechodu do vedľajšieho podstromu.

Vyhľadávanie, ktoré zo živých vrcholov vyberá podľa minimálnej hodnoty $\widehat{c}(x)$ sa volá **LC-SEARCH**.

BFS $\widehat{g}(x) = 0,\ f(h(x)) =$ úroveň x
DFS $f(h(x)) = 0,\ \widehat{g}(x) < \widehat{g}(y)$ pre x dieťa y

vlastnosti metódy LC-B &B

Vlastnosti LC Branch and Bound

Často riešime optimalizačné úlohy. Vieme pomocou metódy LC-B&B dosiahnuť minimum (optimum)?
Uvažujme nasledovnú funkciu

$$\mathbf{c(x)} = \begin{cases} \text{cena cesty z koreňa do x}, & \text{ak x je list s odpoveďou} \\ \infty, & \text{ak x je list bez odpovede} \\ \min\{c(y) \mid y \text{ je list stromu s koreňom x}\}, & \text{ak x je vnútorný vrchol} \end{cases}$$

Ľahko vidno, že ak by LC-B&B používalo pri rozhodovaní funkciu $c(x)$, dosiahli by sme optimálne riešenie. Keďže (z hľadiska zložitosti) efektívny výpočet $c()$ pri riešení ťažkých problémov nemáme, používame odhad $\widehat{c}(x)$. Použitie $\widehat{c}(x)$ namiesto $c(x)$ vo všeobecnosti optimálne riešnie nedáva. Platí ale nasledujúca veta.

Veta 2.8 *$\widehat{c}(x)$ nech je odhad $c(x)$ taký, že*

$$\widehat{c}(x) < \widehat{c}(z) \Leftrightarrow c(x) < c(z)$$

Potom algoritmus LC používajúci $\widehat{c}(x)$ namiesto $c(x)$ nájde riešenie minimálnej ceny a skončí.

ohraničovanie

Ohraničovanie

Ak používame odhad $\widehat{c}(x)$ taký, že $\widehat{c}(x) \leq c(x)$, tak $\widehat{c}(x)$ vlastne dáva dolný odhad. Ak by sme mali aj horný odhad U, tak všetky živé vrcholy s $\widehat{c}(x) > U$ možno vylúčiť. Ako získame U?
– heuristika
– začínajúc s ∞ vylepšujeme podľa toho, čo dosahujeme

Ukážeme použitie pre optimalizačnú úlohu. Ako c budeme používať účelovú funkciu, resp. ako $\widehat{c}(x)$ jej odhad.

2.3.3 Problém obchodného cestujúceho.

Použitie metódy LC-B &B ilustrujeme na probléme obchodného cestujúceho. O tomto probléme je známe, že je ťažký[5]. Daný je ohodnotený orientovaný graf reprezentujúci mestá so vzdialenosťami. Treba prejsť cez všetky mestá, v každom, s výnimkou štartovacieho, treba byť práve raz. Zo štartovacieho mesta výjdeme a potom sa doň vrátime. Treba minimalizovať dĺžku prejdenej cesty, pričom pod dĺžkou cesty myslíme súčet ohodnotení hrán, ktoré tvoria cestu. Bez ujmy na všeobecnosti môžme predpokladať, že cesta začína a končí v meste č.1.

Aké hodnoty pre $\widehat{c}, c, U$?
c(A)
– ak A je list, potom $c(A)$ je dĺžka cesty definovanej cestou z koreňa do listu A
– ak A nie je list, tak $c(A)$ je cena minimálnej ceny listu v podstrome s koreňom A

Jednoduchý odhad $\widehat{c}(x)$ je založený na tzv. redukovanej matici. Hovoríme, že

- riadok(stĺpec) matice je redukovaný, ak obsahuje aspoň jednu 0 a ostatné prvky sú nezáporné;
- **matica je redukovaná**, ak každý riadok a stĺpec, ktorý obsahuje aspoň jeden prvok rôzny od ∞, je redukovaný.

Prečo nás zaujíma redukovaná matica? Nech A je matica cien grafu. Uvedomme si, že každá cesta obchodného cestujúceho (OC) obsahuje práve jednu hranu $A(i,j)$ pre $i = k$ a práve jednu hranu $A(i,j)$ pre $j = k$. Preto keď odpočítame konštantu t od každého prvku v jednom riadku (resp. stĺpci) matice cien A, každá cesta OC sa skráti práve o t. Nemení sa ale relatívny vzťah ciest. Minimálna cesta ostáva minimálnou.

Algoritmus 5 LC-B&B - Redukcia

Nech A je (aktuálna)matica cien grafu, r označuje cenu redukcie

1: nájdi minimum r_i v riadku $i = 1, \ldots, n$. Nech je to prvok $A(i,j)$ na pozícii (i,j)
2: $r \leftarrow r + r_i$
3: odpočítaj r_i od každého prvku v riadku i. Tým na mieste $A(i,j)$ vznikne hodnota 0
4: ak nevznikla redukovaná matica, postupuj analogicky ďalej po tých stĺpcoch, ktoré nie sú redukované, až kým nezískaš redukovanú maticu

Každému bodu stavového priestoru priradíme redukovanú maticu a cenu nasledovným spôsobom:

- Koreňu priradíme maticu $red(A)$, ktorá vznikla z matice cien vyššie popísaným Algoritmom 5. Cena tohto vrchola je cena redukcie, ktorou sme vyrobili redukovanú maticu v koreni. Uvedomme si, že uvedená hodnota odpovedá tomu, že sa snažíme z každého vrchola odísť a do každého vrchola prísť po najkratšej hrane.

- Nech O je otec a S jeho syn taký, že odpovedá zaradeniu hrany (i,j) do cesty OC. Zaradenie hrany (i,j) do cesty OC znamená, že

  – nesmieme viac použiť hranu odchádzajúcu z i. Preto každý prvok v i-tom riadku nastavíme na ∞

[5]Tento prblém je NP-úplný, čo znamená, že máme dosť dôvodov sa domnievať, že preň neexistuje polynomiálny algoritmus.

- nesmieme viac použiť hranu prichádzajúcu do j. Preto každý prvok v stĺpci j nastavíme na ∞
- ak ešte nechceme ísť do 1, nastavíme $A(j,1) = \infty$

Takto vznikla nová matica cien $A_{i,j}$, ktorá nemusí byť redukovaná. Zredukujme ju, čím získame maticu $red(A_{ij})$, ktorú priradíme vrcholu S. Nech $r(i,j)$ je cena redukcie matice A_{ij} na $red(A_{ij})$ (redukujeme riadky a stĺpce okrem tých, ktoré obsahujú samé ∞).
Potom $\widehat{c}(S) = \widehat{c}(O) + A(i,j) + r(i,j)$

Postupujeme teda tak, že vypočítame redukovanú maticu a cenu pre každého syna (branch) a pohneme sa do toho syna, ktorý má minimálnu cenu (LC).

Poznámka: Namiesto písania hodnôt ∞ môžme odpovedajúci riadok a stĺpec z matice odstrániť. V tomto prípade bude matica odpovedať už len podgrafu indukovanému doteraz nezaradených vrcholov.
Analogicky môžme zvážiť rozhodnutie o nezaradení hrany (i,j) do cesty OC.

- ak X je otec a P jeho syn taký, že odpovedá nezaradeniu hrany (i,j) do cesty OC, tak maticu A musíme modifikovať nasledovne
  - keďže hranu (i,j) viac nemáme použiť, nastavíme $A(i,j) = \infty$ redukcia.

Takto vznikla nová matica B, ktorú musíme zredukovať. Uvedomme si, že budeme redukovať len v tom prípade, ak pôvodná hodnota $A(i,j) = 0$. Redukovanú maticu B' priradíme vrcholu P a cenou bude $\widehat{c}(P) = \widehat{c}(X) + r(i,j)$, kde $r(i,j)$ je cena redukcie potrebná na získanie redukovanej matice B'.

Teraz už môžme uvažovať aj iné stratégie

- vyber hranu, ktorej nezaradenie vedie k maximálnej cene
- vyber hranu, pri ktorej je maximálny rozdiel medzi cenou zaradenia $\widehat{c}(L)$ a cenou $\widehat{c}(P)$ nezaradenia danej hrany do cesty OC

2.3.4 0/1 Plnenie batoha

Vysvetlili sme, ako metódu LC-B&B používame na riešenie minimalizačných problémov. Je možné ju použiť aj na riešenie problém 0/1 plnenia batoha, ktorý je maximalizačný? Ľahko vidno, že áno. Maximalizovať $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ je ekvivalentné minimalizovaniu $-\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$.

Použime statickú reprezentáciu stavového priestoru (zaradenie x_i odpovedá 1-hrane, nezaradenie x_i 0-hrane). Zrejme

$$\mathbf{c(x)}=\begin{cases} -\sum_{i=1}^{n} x_i p_i, & \text{ak list x reprezentuje prípustné riešenie} \\ \infty, & \text{ak list x neodpovedá prípustnému riešeniu} \\ \min\{c(0syn(x)), c(1syn(x))\}, & \text{ak x je vnútorný vrchol} \end{cases}$$

Budeme používať dva odhady - $\widehat{c}(x)$ a $u(x)$ - také, že

$$\widehat{c}(x) \leq c(x) \leq u(x)$$

Ako tieto odhady získame? Ak x je vrchol na úrovni j, tak cesta z koreňa doň určuje nastavenie pre $x_i, 1 \leq i < j$. Zrejme

$$c(x) \leq -\sum_{i=1}^{j-1} x_i p_i$$

a preto ako horný odhad určite môžme použiť $u(x) = -\sum_{i=1}^{j-1} x_i p_i$. Vylepšený horný odhad získame algoritmom 6; pre $q = -\sum_{1 \leq i < j} p_i x_i$ použijeme

$$u(x) = UBOUND(q, \sum_{1 \leq i < j} w_i x_i, j-1, M)$$

Algoritmus 6 UBOUND(p,w,k,M)

```
P ← p; W ← w
for i ← k + 1 to n do
    if W + w_i ≤ M then W ← W + w_i; P ← P − p_i
return(P)
```

K určeniu dolného odhadu $\widehat{c}(x)$ si všimnime Algoritmus 7. Horný odhad na profit je získaný simulovaním greedy prístupu k riešeniu (maximalizačnej verzie) problému za predpokladu, že $\frac{p_i}{w_i} \geq \frac{p_{i+1}}{w_{i+1}}$. Ľahko vidno, že

$$-BOUND(-q, \sum_{1 \leq i < j} w_i x_i, j-1, M) \leq c(x)$$

preto ako dolný odhad použijeme

$$\widehat{c}(x) = -BOUND(-q, \sum_{1 \leq i < j} w_i x_i, j-1, M)$$

2.3.5 Záverečné poznámky

Veľmi časté využitie metódy Branch-and-bound nachádzame pri riešení takých optimalizačných kombinatorických problémov, keď prehľadanie priestoru potenciálnych riešení síce garantuje optimáne riešenie ale veľkosť prehľadávaného priestoru robí problém prakticky neriešiteľným. Snahou je "zmenšiť" prehľadávaný priestor identifikovaním tých jeho častí, v ktorých sa hľadané riešenie určite nenachádza; hovoríme tomu *orezávanie*.

MAxSAT

Príklad 2.4 *Majme problém MaxSAT: vstupom je formula F v KNF*[6]*, cieľom také priradenie α, ktoré maximalizuje počet splnených klauzúl; niekedy nás zaujíma len to číslo.*
Nech vstupom je formula F

$$\begin{aligned} F = \quad & (x_1 \vee \overline{x_2}) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2) \\ & \wedge (x_1 \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_3} \vee x_4) \\ & \wedge x_3 \wedge (x_1 \vee x_4) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_3}) \wedge x_1 \end{aligned}$$

Aplikujme B& B pri rôznych stratégiách generovania vrcholov (bez orezávania, do hĺbky najprv ľavý syn, do hĺbky najprv pravý syn, ...) Všimnime si, ako sa zvolená stratégia prejavila na počte vygenerovaných vrcholov.

Identifikovať oblasti, v ktorých sa optimálne riešenie nenachádza, nie je jednoduché. Neraz však je charakter úlohy taký, že analýzou čiastočného riešenia dokážeme usúdiť, že kvalita každého riešenia, ktoré z neho dostaneme, bude horšia ako nejaké už známe riešenie. To je jeden z dôvodov, prečo sa často sústredíme práve na fázu predvýpočtu, v ktorej sa snažíme o získanie čo najlepšieho *odhadu* optimálneho

[6] KNF-konjunktívna normálna forma/konjunkcia elementárnych disjunkcií

Algoritmus 7 BOUND(p,w,k,M)

p aktuálny profit
w aktuálny súčet váh
k index posledne odstráneného prvku
M veľkosť batoha

výsledkom je nový profit
$P \leftarrow p; W \leftarrow w$
for $i \leftarrow k$ to n **do**
$W \leftarrow W + w_i$
if $W < M$ **then** $P \leftarrow P + p_i$
else return$\left(P + \left(1 - \frac{(W-M)}{w_i}\right) \times p_i\right)$
return(P)

riešenia. Na základe tohto odhadu potom môžme veľa vetiev v strome priestoru riešení orezať.

Aké metódy sa používajú na získavanie týchto dobrých odhadov?
- Aproximačné algoritmy
- Relaxácia redukciou na lineárne programovanie
- Random sampling
- Lokálne prehľadávanie
- Heuristiky (simulované žíhanie, genetické algoritmy,..)

Metóda LC-B-B postupne generuje nasledovníkov v priestore (čiastočných)riešení (branch), na základe analýzy prípustnosti a kvality najlepšieho dosiahnuteľného riešenia oreže vetvy, ktoré daným kritériom neprešli (bound), potom prežité prvky ohodnotí a presunie sa do najlepšieho z nich (LC=least cost). V priebehu výpočtu samozrejme ako kritérium orezávania používame to lepšie z {odhad, doteraz-najlepšie riešenie}. [7]

Spomeňme si aj na riešenie problému plnenia batoha touto metódou. vzhľadom k tomu, že ide o maximalizačnú úlohu, vyrobili sme prenásobením účelovej funkcie mínus jednotkou z problému úlohu minimalizačnú. Mohli by sme však rovnako dobre použiť namiesto minimalizácie maximalizáciu.

Keďže sme použili statický strom, na úrovni j sme rozhodovali o zaradení/nezaradení prvku (w_i, p_i). Ako dolný odhad na korektnú hodnotu $c(x)$ by sme prirodzene použili doteraz zozbieraný profit $\sum_{1 \leq i < j} p_i x_i$. Pre horný odhad použijeme na neznámu časť hodnotu optimálneho riešenia pri racionálnych koeficientoch. Riešenie pri celočíselných koeficientoch lepšie byť nemôže.

Je zrejmé, že ak príjmeme predpoklad $P \neq NP$, tak nemožno očakávať, že by uvedená metóda garantovala polynomiálny čas. Ziskom nie je garantovane menšia zložitosť v každom prípade, ale znižovanie zložitosti konkrétnych inštancií.

2.4 Orezávanie stromu prehľadávania

Namiesto "naivného" úplného prehľadávania používame niečo rozumnejšie, čo nám zabezpečí zníženie zložitosti aj v najhoršom prípade. Snažíme sa o znižovanie exponentu, resp. základu. Vplyv týchto zmien vidíme v tabuľke.

[7] Príkladom bolo riešenie problému obchodného cestujúceho minulý semester.

	n=10	n=50	n=100
2^n	1024	16 cifier	91 cifier
$2^{n/2}$	32	$33 \cdot 10^6$	46 cifier
$(1.2)^n$	7	9100	24 cifier

2.4.1 Orezávanie a 3SAT

Vplyv orezávania stromu prehľadávania si všimnime na probléme[8] 3SAT, keď namiesto triviálneho prehľadávania hrubou silou $O(2^n)$ dostaneme algoritmus zložitosti $O(|F|1,84^n)$. Vylepšenie spočíva v zakomponovaní informácie o znalosti hodnoty niektorej premennej– v niektorých prípadoch nám informácia o hodnote nejakej premennej umožní zjednodušenie formuly F.

3SAT

$\boldsymbol{F(x_1 = a_1, ..., x_k = a_k)}$ označuje formulu, ktorá vznikla z formuly F dosadením hodnoty a_i za premennú $x_i, 1 \leq i \leq k$. V našom prípade je F formula v tvare 3KNF[9]. Ako v tomto prípade môžme využiť/realizovať znalosť hodnoty premennej?

$\boldsymbol{F(x = 1)}$ vznikne z F aplikovaním nasledujúcich pravidiel

- odstránenie všetkých klauzúl, ktoré obsahujú x
- ak v klauzule je okrem $\neg x$ aj iný literál, tak $\neg x$ z klauzuly odstránime
- ak klauzula obsahuje len $\neg x$, tak je formula nesplniteľná

$\boldsymbol{F(x = 0)}$ vznikne z F aplikovaním nasledujúcich pravidiel

- odstránenie všetkých klauzúl, ktoré obsahujú $\neg x$
- ak v klauzule je okrem x aj iný literál, tak x z klauzuly odstránime
- ak klauzula obsahuje len x, tak je formula nesplniteľná

Vidíme, že uvedené "dosadenie" realizujeme v lineárnom čase. Navyše, dosadenie hodnoty do formuly znižuje počet klauzúl aj počet premenných vo formule. Označme

$\boldsymbol{3KNF(n,r)}$ = $\{F \mid F$ je formula v tvare 3KNF nad n premennými, ktorá obsahuje nanajvýš r klauzúl$\}$.

$$F \in 3KNF(n,r) \implies \begin{cases} F(x=1) & \in & 3KNF(n-1,r-1) \\ F(x=0,y=1) & \in & 3KNF(n-2,r-1) \\ F(x=0,y=0,z=1) & \in & 3KNF(n-3,r-1) \end{cases}$$

Nech F je 3KNF formula, $(x \vee y \vee z)$ klauza v nej. Potom F je splniteľná práve vtedy ak je splniteľná aspoň jedna z formúl $F(x{=}1),\ F(x{=}0,y{=}1),\ F(x{=}0,y{=}0,z{=}1)$.

Všetky tieto úvahy vedú k použitiu metódy rozdeľuj-a-panuj, ktorá je realizovaná v Algoritme 8 –DC-3SAT(F).

- Korektnosť algoritmu vyplýva z predchádzajúcich úvah.
- Kvôli analýze času označme $T(n,r)$ čas algoritmu pri vstupnej formule z $3KNF(n,r)$.

Algoritmus 8 DC-3SAT(F)

1: ak $F \in 3KNF(3,k)$ alebo $F \in 3KNF(m,2)$, tak dosadením všetkých hodnôt zisti odpoveď
2: nech H je jedna z najkratších klauzúl v F
3: ak $H = (x)$ tak return DC-3SAT(F(x=1))
4: ak $H = (x \vee y)$ tak return DC-3SAT(F(x=1))$\vee$ DC-3SAT(F(x=0, y=1))
5: ak $H = (x \vee y \vee z)$ tak return DC-3SAT(F(x=1))$\vee$ DC-3SAT(F(x=0, y=1))$\vee$ DC-3SAT(F(x=0, y=0,z=1))

Triviálne platí, že $|F|/3 \leq r \leq |F|$. Preto

$$T(3,r) \leq 24r \quad T(2,r) \leq 12r \quad T(1,r) \leq 3r$$

Navyše, dosadenie $F(l=a)$ vieme realizovať v čase $\leq 9r$. Zložitosť algoritmu teda môžme vyjadriť vzťahom

$$T(n,r) \leq \begin{cases} 24r & \text{ak } n \leq 3 \text{ alebo } r \leq 2 \\ 54r + T(n-1,r-1) + T(n-2,r-1) + T(n-3,r-1) \end{cases}$$

Indukciou overíme, že $T(n,r) \leq 27r \cdot (1.84^n - 1)$. Triviálne prípady preskočíme;

$$\begin{aligned} T(n,r) \leq \quad & 54r + 27(r-1)(1.84^{n-1} - 1) + 27(r-1)(1.84^{n-2} - 1) \\ & +27(r-1)(1.84^{n-3} - 1) \\ & \leq 54r + 27r(1.84^{n-1} + 1.84^{n-2} + 1.84^{n-3} - 3) \\ & \leq 27r \cdot 1.84^n \left(\tfrac{1}{1.84} + \tfrac{1}{1.84^2} + \tfrac{1}{1.84^3}\right) + 27r \\ & = 27r \left[\left(\tfrac{1.84^2+1.84+1}{1.84^3}\right) \cdot 1.84^n - 1\right] \\ & \leq 27r(1.84^n - 1) \end{aligned}$$

Ukázali sme, že pre zložitosť algoritmu DC-3SAT(F) so vstupom $F \in 3KNF(n,r)$ platí $O(r \times 1,84^n)$.

□

2.4.2 Orezávanie a nezávislá množina vrcholov

Sústreďme sa na orezávanie stromu prehľadávania s cieľom minimalizovať čas najhoršieho prípadu úplného prezretia stromu pre problém nezávislej množiny vrcholov.

Majme graf $G = (V,E)$, $|V| = n$. Podmnožina $S \subseteq V$ tvorí nezávislú množinu vrcholov, ak neexistujú hrany medzi vrcholmi z S ($\forall u,v \in S\ (u,v) \notin V$). Úlohou je pre vstupný graf G a $k \in S$ zistiť, či v G existuje nezávislá množina vrcholov veľkosti k.
Označme IS množinu vstupov G,k takých, že v G existuje nezávislá množina vrcholov mohutnosti k.

nezávislá množina

Pri riešení hrubou silou prezrieme všetky k-prvkové podmnožiny množiny vrcholov a overíme, či tá-ktorá množina tvorí nezávislú množinu vrcholov. Aká je zložitosť tohto prístupu?

hrubá sila

Základnou ideou tvorenia stromu prehľadávania je robiť vetvenie podľa maximálneho stupňa vrchola.

strom prehľadávania

triviálny prípad

[8] 3SAT – pre vstupnú boolovskú formulu $F(x = x_1, \ldots, x_n)$ v tvare 3KNF(konjunkcia elementárnych disjunkcií dĺžky maximálne 3) máme určiť, či existuje také priradenie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \{0,1\}$ premenným $x_1, \ldots, x_n$, že $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$

[9] Hovoríme, že formula je v 3KNF tvare, ak je to konjunkcia elementárnych disjunkcií/klauzúl, pričom dĺžka jednotlivých klauzúl je nanajvýš 3

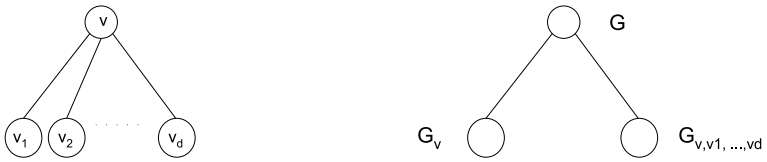
Triviálnym prípadom tohto prístupu je zrejme graf, v ktorom je maximálny stupeň nanajvýš dva. V tom prípade graf pozostáva z cyklov a ciest (a izolovaných vrcholov).

vetvenie

Majme teda graf, v ktorom existuje aspoň jeden vrchol stupňa aspoň 3. Nech v je vrchol maximálneho stupňa, $v_1, \ldots, v_d, d \geq 3$ jeho susedia. Ak S je nezávislá množina vrcholov, potom sú z pohľadu vrchola v dve možnosti: vrchol v alebo patrí alebo nepatrí do množiny S

$v \notin S$

ak v nepatrí do S, tak môžme z grafu G odstrániť vrchol v a všetky s ním susediace hrany a množina S sa nezmení. Nazvime takto modifikovaný graf G_v.



$v \in S$

ak v patrí do nezávislej množiny, zaradíme ho tam, a z grafu odstránime nielen vrchol v a s ním susediace hrany, ale aj vrcholy $v_1, \ldots, v_d$ a s nimi susediace hrany. Takto modifikovaný graf označíme $G_{v,v1,\ldots,vd}$. Je zrejmé, že

$$(G,k) \in \mathsf{IS} \Leftrightarrow (G_v,k) \in \mathsf{IS} \vee (G_{v,v1,\ldots,vd}, k-1) \in \mathsf{IS}$$

Keďže počet vrcholov grafu G_v je $n-1$ a graf $G_{v,v1,\ldots,vd}$ má nanajvýš $n-4$ vrcholov, o zložitosti algoritmu založenom na vyššie uvedenom prístupe potom platí:

$$T(n) \quad \leq \quad T(n-1) + T(n-4) + O(n+m) \tag{2.1}$$

Označme $O^*(T(m(x)))$ triedu $O^*(T(m(x)) \cdot p(|x|))$, kde $p()$ je polynóm. Potom riešením rekurentnej nerovnice (2.1) je $T(n) = O^*(1.8303^n)$.

2.4.3 Orezávanie a minimálny bandwidth

Majme graf $G = (V, E)$ s n vrcholmi. Lineárnym usporiadaním rozumieme bijektívne zobrazenie $f : V \to \{1, \ldots, n\}$, ktoré možno vnímať ako vnorenie vrcholov grafu na čiaru. Pri fixovanom vnorení f možno každej hrane $(u, v) \in E$ pôvodného grafu G priradiť tzv. *stretch* ako vzdialenosť koncových vrcholov na čiare: $|f(u) - f(v)|$. Následne toto vnorenie určuje tzv. bandwidth b grafu G, čo je maximum stretch faktorov uvažované cez všetky hrany grafu.

$$b = \max\{|f(u) - f(v)| \mid (u, v) \in E\}$$

bandwidth problém

Úlohou je k danému vstupnú grafu $G = (V, E)$ nájsť lineárne usporiadanie/vnorenie f, ktoré minimalizuje bandwidth b.

hrubá sila

Riešenie hrubou silou je zložitosti $O^*(n!)$ – preveríme všetky permutácie vrcholov a vezmeme to usporiadanie, ktoré minimalizuje bandwidth.

orezanie

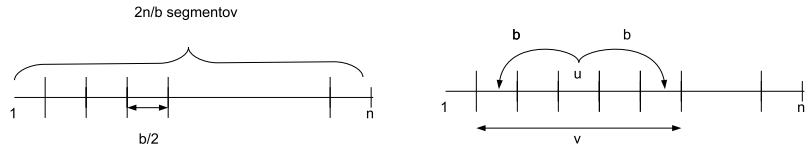
Kde možno šetriť? Potenciálne riešenie budujeme postupne, pri jeho konštrukcii postupne urezávame vetvy, ktorých bandwidth je určite viac ako b. Úlohu trochu zmeníme - pre konkrétnu hodnotu b budeme hľadať také vnorenie, ktorého bandwidth je nanajvýš b. Riešenie pôvodného problému získame postupným spúšťaním algoritmu pre hodnotu $b = n, n-1, \ldots$ dovtedy, kým nejaké vnorenie nájdeme.

Kvôli jednoduchosti predpokladáme, že n, b sú mocninami dvojky[10]. Algoritmus pracuje v dvoch fázach:

1. rozdelíme množinu vrcholov na $2n/b$ podmnožín veľkosti $b/2$, pričom i-ta podmnožina V_i obsahuje vrcholy, ktoré sa v konštruovanom vnorení zobrazia do intervalu/množiny $I_i = \{(i-1)b/2 + 1, \ldots, ib/2\}$
2. usporiadaním jednotlivých množín sa snažíme skonštruovať požadované usporiadanie.

konštrukcia podmnožín

Cieľom prvej fázy je rozloženie množiny všetkých potenciálnych usporiadaní na nanajvýš $n \cdot 5^{n-1}$ podmnožín takých, že v každom z nich je pozícia jednotlivých vrcholov určená s presnosťou $\pm b/2$.



Obrázok 2.1: Cieľom prvej fázy je určiť približnú polohu vrcholov na priamke. Vrchol v, sused už zaradeného vrchola u, môže byť umiestnený do jedného z piatich susediacich segmentov.

Dosiahneme to nasledovne:

- Vezmeme náhodný vrchol $v \in V$ a zaradíme ho (potenciálne)do každého z intervalov/segmentov $I_1, \ldots, I_{2n/b}$- na prvej úrovni stromu prehľadávania máme teda $2n/b$ vrchlov $v_1, \ldots, v_{2n/b}$.
- Postupne umiestňujeme suseda v už zaradeného vrchola u do všetkých segmentov, ktoré nie sú príliš ďaleko: ak $u \in I_i$ tak $v \in \{I_{i-2}, I_{i-1}, I_i, I_{i+1}, I_{i+2}\}$ Pri zaradení u do segmentu dbáme na to, aby sme do žiadneho segmentu nepriradili viac ako $b/2$ vrcholov a aby žiaden z už zaradených susedov s vrchola u neležal v príliš vzdialenom segmente. Potrebujeme zaradiť $n-1$ vrcholov, každý má nanajvýš 5 možností, preto je každý z vrcholov $v_1, \ldots, v_{2n/b}$ koreňom stromu hĺbky $n-1$ s nanajvýš 5^{n-1} listami.

čas prvej časti

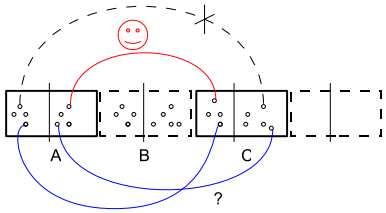
Konštrukcia podmnožín sa realizuje v čase $O^*(5^n)$.

overenie

V každom z vytvorených listov spustíme overenie toho, či vrcholy v jednotlivých segmentoch vieme usporiadať tak, aby celkové usporiadanie vrcholov zachovalo bandwidth b. Postupujme po segmentoch zľava doprava. Vrcholy sme do segmentov umiestnili tak, že pre každý vrchol u zo segmentu V_i, ktorého sused v umiestnený v segmente V_j platí: $|j - i| \leq 2$.

Uvažujme teda tri susedné segmenty A, B, C, každý veľkosti $b/2$. Nech vrcholy v rámci segmentov usporiadame akokoľvek, bude stretch hrán medzi vrcholmi v rámci A, resp. B, resp. C nanajvýš $b/2$; tieto hrany kontrolovať netreba, môžme ich z grafu odstrániť. Podobne, stretch hrán s jedným vrcholom v A a druhým v B je nanajvýš b, tieto hrany tiež môžme odstrániť. Musíme kontrolovať hrany medzi A a C. V poriadku sú hrany medzi vrcholmi v pravej časti A a ľavej časti C, tie môžme odstrániť. Zlé sú hrany medzi ľavou časťou A a pravou časťou C, tie spôsobia orezanie. Ostatné hrany treba kontrolovať vzhľadom ku konkrétnemu usporiadaniu vrcholov v rámci príslušných častí A, C.

[10] domyslite detaily pre prípad, keď tomu tak nie je



Obrázok 2.2: Znázornenie dobrých, zlých a potenciálne dobrých hrán.

Korektné usporiadanie segmentov A a C existuje práve vtedy, keď existuje rozdelenie segemtnov A,C na ľavú a pravú časť tak, že existuje korektné usporiadnanie ľavých častí a súčasne existuje korektné usporiadanie pravých častí. Problém kontroly hrán medzi segmentami A a C, resp. medzi segmentami na nepárnej pozícii, sme redukovali na kontrolu hrán medzi ľavými časťami segmentov A a C a pravými časťami týchto segmentov; analogicky pre segmenty na párnych pozíciách.

Pre všetky umiestnenia vrcholov do ľavej a pravej polovice svojho segmentu preveríme, či nie sú porušené podmienky na veľkosť bandwidth (dĺžka hrany väčšia ako b). Keďže kontrola pre segmenty na párnych pozíciách je nezávislá od kontroly segmentov na ľavých pozíciách, môžme postupovať rekurzívne: Označme $T(k)$ zložitosť overenia korektného dousporiadania k prvkov. Potom zložitosť rekurzívneho overovania vyjadríme nasledovne:

$$T(k) \leq 2^k \cdot (T(k/2) + T(k/2)) \qquad\qquad T(k) = O(4^k)$$

čas druhej časti V druhej časti sme kontrolovali $O(5^n)$ približných usporiadaní, čas kontroly každého z nich je $O(4^k)$.

celkový čas Súčet časov vedie k celkovej zložitosti

$$O^*(5^n \cdot 4^n) = O^*(20^n)$$

2.5 Predspracovanie

Keďže špeciálne prípady majú často lepšiu zložitosť ako všeobecné, počiatočné predspracovanie vstupov často pomôže znížiť zložitosť. Samozrejme, nemôžme za predspracovanie zaplatiť príliš veľa.

I
$k^2 \rightsquigarrow k \log k$

Na zahriatie uvažujme nasledovný jednoduchý problém.

vstup: $x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_k; S$

výstup: $\begin{cases} 1, & \text{existuje dvojica indexov } i,j : x_i + y_j = S \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$

Triviálny algoritmus generuje všetky dvojice indexov, preto vedie k zložitosti $O(k^2)$. Ak si najprv y-ovú postupnosť utriedime, tak ku každému x_i hľadáme v utriedenej postupnosti y_j také že $y_j = S - x_i$. Zložitosť sme znížili na $O(k \log k)$.

II
$k^2 \rightsquigarrow k \log k$

Uvažujme "dvojrozmernú verziu" predchádzajúceho príkladu:

vstup: $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k); z_1, \ldots, z_k; W$

výstup: $\begin{cases} 1, & \forall z_j \text{ je maximálne také } y_i : x_i + z_j \leq W \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$

Triviálne riešenie hrubou silou preverí $O(k^2)$ možností.

Hovoríme, že bod (x_i, y_i) dominuje bodu (x_j, y_j) ak platí, že $(x_i \leq x_j) \wedge (y_i \geq y_j)$. *predpspracovanie*
Štandardnými metódami počítačovej geometrie nájdeme množinu dominujúcich bodov, tieto utriedime podľa x-ovej súradnice a ku každému z_j binárnym vyhľadávaním nájdeme najväčšie x_i také, že $x_i \leq W - z_j$. Tým sme získali aj hodnotu y_i. Zložitosť sme pritom znížili na $O(k \log k)$.

2.5.1 Problém čiastočných súčtov - SubsetSum problem

A teraz uvažujme NP-ťažký problém čiastočných súčtov:
vstup: $a_1, \ldots, a_n; S$

výstup: $\begin{cases} 1, & \exists I \subseteq \{1, \ldots, n\} : \sum_{i \in I} a_i = S \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$

Metóda hrubej sily vedie k zložitosti $O(2^n)$.
Predspracovanie vlastne spočíva v redukcii na predchádzajúci problém. *predspracovanie*

- Rozdelíme množinu indexov $J = \{1, \ldots, n\}$ na dve množiny:
  $J_1 = \{1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor\}$, $J_2 = \{\lceil n/2 \rceil, \ldots, n\}$
- Nech X je množina všetkých možných súčtov prvkov s indexami z J_1; analogicky Y sú súčty podmnožín prvkov s indexami z J_2.
  – v čase $O(2^{n/2})$ sme dostali množiny mohutnosti $2^{n/2}$
- Chceme $S_1 \in J_1$, $S_2 \in J_2$ tak, aby $S_1 + S_2 = S$, čo je vlastne problém I: utriedime v rámci X a potom ku každému $y_j \in S_2$ hľadáme $X_i = S - y_j$.
- $T(n) = O(2^{n/2}) + O(2^{n/2} \log 2^{n/2}) + O(2^{n/2} \log 2^{n/2}) = O^*(2^{n/2})$

Úloha: Využite metódu predspracovania pri riešení 0/1-KanpSack problému (problém plnenia batoha s koeficientami 0,1)

2.6 Lokálne prehľadávanie

Metóda lokálneho prehľadávania sa používa pri riešení optimalizačných úloh. Priestor riešení zorganizujeme tak, aby pre každé riešenie bola určená množinu jeho susedov. Potom sa hýbeme v tomto priestore cez množiny susedov tak, aby sme v každom kroku riešenie vylepšili. Pri takomto prehľadávaní skončíme zrejme v lokálnom optime. Na čo sa pri uvedenej metóde treba sústrediť:

- Ako získame **štartovací bod**? Často použijeme nejakú rýchlu heuristiku. Niekedy sa využíva aj viacnásobné spustenie LSS z náhodne vygenerovaných štartových bodov - potom hovoríme o *multistart local search*
- Ako definujeme **množinu susedov**? Uvedomme si, že vypočítať suseda nesmie byť veľmi zložité. Tiež by tá množina susedov nemala byť príliš veľká, keďže ju pri výbere nasledujúceho kroku chceme prezerať
- Ako určíme **nové riešenie**? Zvyknú sa používať dva základné prístupy
  – prvé lepšie (*first improvement*)
  – najlepšie spomedzi susedov (*best improvemenet*)

Formálnejšie. Nech x je vstup do optimalizačného problému U, $M(x)$ označuje množinu prípustných riešení. Definujeme *susednosť* ako funkciu f_x z $M(x)$ do $Pot(M(x))$, kde $Pot(A)$ označuje vštky podmnožiny množiny A. Vyžadujeme, aby *susednosť*

1. $\alpha \in f_x(\alpha) \quad \forall \alpha \in M(x)$
2. $\beta \in f_x(\alpha) \Longrightarrow \alpha \in f_x(\beta)$ //symetria
   //od tejto podmienky niekedy upúšťame
3. $\forall \alpha, \beta \in M(x)\ \exists k, \gamma_1, \ldots, \gamma_k \in M(x)$ tak, že
   $\gamma_1 \in f_x(\alpha), \gamma_{i+1} = f_x(\gamma_i), \beta = f_x(\gamma_k)$ //dosiahnuteľnosť

Susednosť f_x prirodzene definuje graf susednosti

$$G_{M(x),f_x} = (M(x), \{(\alpha, \beta) | \alpha \in f_x(\beta), \alpha \neq \beta, \alpha, \beta \in M(x)\})$$

Má tiež zmysel hovoriť o vzdialenosti dvoch riešení vzhľadom k susednosti f_x; vzdialenosťou dvoch riešení rozumieme dĺžku cesty, ktorá ich v grafe susednosti spája. Túto vzdialenosť označíme *dist*

Schému lokálneho prehľadávania podľa susednosti f_x možno načrtnúť takto:

Algoritmus 9 LSS_{f_x}

```
1: nájdi prípustné riešenie α ∈ M(x)
2: while α nie je lokálne optimum do
3:     nájdi β ∈ f_x(α) s lepšou cenou
4:     α ← β
5: return α
```

lokálne optimum vzhľadom k f_x

Čo myslíme lokálnym optimom? Nech U je optimalizačný problém s účelovou funkciou *cena*, *ciel* $\in \{\max, \min\}$ určuje, či ju chceme minimalizovať alebo maximalizovať. Potom hovoríme, že prípustné riešenie $\alpha \in M(x)$ je *lokálne optimum vzhľadom k f_x* ak

$$cena(\alpha) = ciel\{cena(\beta) \mid \beta \in f_x(\alpha)\}$$

použitie LSS

Ľahko vidno, že k popisu algoritmu LSS pre riešenie nejakého problému väčšinou stačí popísať susednosť $f_x(\alpha)$

Fakt 2.9 *Každý algoritmus lokálneho prehľadávania, ktorý je založený na LSS, dá na výstup prípustné riešenie, ktoré je lokálne optimálne vzhľadom k použitej susednosti f_x.*

Čo vieme povedať o zložitosti riešenia problému použitím Algoritmu LSS? Zložitosť zrejme ovplyvňuje

- zložitosť výpočtu lokálneho optima //presnosť vs. čas
- počet iterácii while cyklu
  //Ak riešime problém s celočíselnou účelovou funkciou,
  // znamená každé opakovanie vylepšenie aspoň o 1.

TSP

Príklad 2.5 *Uvažujme problém obchodného cestujúceho a dve riešenia založené na dvoch rôzne definovaných susednostiach*
2-exchange *z existujúcej HK(prípustného riešenia TSP) odstránime dve hrany (a, b), (c, d) také, že $|\{a, b, c, d\}| = 4$. Tieto dve hrany nahradíme hranami (a, c), (b, d).*

3-exchange *z existujúcej HK odstránime 3 hrany a nahradíme ich inými (nie nutne odlišnými) tromi hranami*

Algoritmus 10 KL-LSS (s variabilnou hĺbkou)

```
1: nájdi prípustné riešenie α = (p_1, ..., p_n) ∈ M(x)
2: zlepsenie ← true
3: exchange ← {1, ..., n}; j ← 0; α_j ← α
4: while zlepsenie do
5:     while exchange ≠ ∅ do
6:         j ← j + 1
7:         α_j ← riešenie z f_x(α), ktoré optimalizuje zisk(α_{j-1}, α_j) a od α_{j-1} sa líši len
               v paramteroch z exchange
8:         exchange ← exchange/parametre, v kt. sa líšia α_{j-1}, α_j
9:     vypočítaj zisk(α, α_i) pre i = 1, ..., j
10:    vypočítaj ℓ ∈ {1, ..., j} také, že zisk(α, α_ℓ) = max{zisk(α, α_i)|i = 1, ..., j}
11:    if zisk(α, α_ℓ) > 0 then
12:        α ← α_ℓ
13:        exchange ← {1, ..., n}
14:    else zlepsenie ←false
15: return α
```

SAT

Príklad 2.6 *Pri hľadaní spĺňajúceho priradenia pre boolovskú formulu $F(x_1, \ldots, x_n)$ je susedom vektora hodnôt $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ taký vektor hodnôt, ktorý vznikne* zmenou práve jedného bitu [11] *v riešení α.*

Kernighan-Lin prehľadávanie s variabilnou hĺbkou

Úzkym miestom v metóde LSS je to, že sa hýbeme len v okolí momentálneho riešenia, pričom trváme na tom, aby sa riešenie stále vylepšovalo. Uvažovala sa taká modifikácia, že v jednej iterácii prezrieme okolie riešenia do nejakej vzdialenosti/hĺbky — *prehľadávanie s variabilnou hĺbkou*. Predpokladáme taký typ optimalizačného problému, pri ktorom riešenie vieme popísať zoznamom špecifikácií $(p_1, \ldots, p_n)$. Nech pre vstup x je $M(x)$ množina prípustných riešení. Potom

$$f_x^k(\alpha) = \{\beta \in M(x) \mid dist_{f_x}(\alpha, \beta) \leq k\}$$

je množina riešení, ktoré z riešenia α vieme získať postupným aplikovaním niekoľkých, nanajvýš však k, lokálnych transformácií na α.
Nech α, β sú prípustné riešenia, *cena* účelová funkcia. Definujme

$$zisk(\alpha, \beta) \stackrel{def.}{=} cena(\alpha) - cena(\beta)$$

Potom v jednom "kroku" aplikujeme nanajvýš n lokálnych transformácií, pričom

- Ak začneme s prípustným riešením $\alpha = (p_1, \ldots, p_n)$, tak pre výsledné prípustné riešenie $\gamma = (q_1, \ldots, q_n)$ platí, že $q_i \neq p_i$
- Ak $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ je vytváraná postupnosť prípustných riešení, tak $\alpha_0{=}\alpha$, $\alpha_m{=}\gamma$ a
  1. $zisk(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = \max\{zisk(\alpha_i, \delta) \mid \delta \in f_x(\alpha_i)\}$
  2. ak sa v i-tej iterácii zmenil parameter p_j, tak p_j sa v žiadnej ďalšej iterácii nezmení
- Po vytvorení postupnosti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sa α nahradí tým α_i, ktoré optimalizuje $zisk(\alpha, \alpha_j)$. Ak je to zmena k lepšiemu, pokračujeme ďalšou iteráciou. Ak nie, výstupom je α.

Niekoľko krokov nesprávnym smerom môže byť eliminovaných jedným krokom správnym smerom. Na hľadanie najlepšieho riešenia v priestore $f_x^k(\alpha)$ používame greedy prístup.

[11] Hamingova vzdialenosť vektorov je 1

Uvedomme si, že KL-LSS algoritmus sa drží greedy prístupu, čo zabraňuje tomu, aby sme pri hľadaní suseda pre α mali čas exponenciálny od $|\alpha|$. Takže zložitosť jedného vylepšenia je $O(n \cdot t(|\alpha|)|f_x(\alpha)|)$, pričom funkcia f hovorí o zložitosti realizácie jednej transformácie.

Ukážeme aplikáciu prehľadávania s variabilnou hĺkou na dvoch problémoch. Začneme **problémom minimálneho vyváženého rezu**:

Vstup: graf s ohodnotenými hranami $G = (V, E, c)$
Výstup: rozdelenie množiny vrcholov na disjunktné rovnako veľké podmnožiny V_1, V_2, ktoré minimalizujú cenu hranového rezu

KL-LSS a minimálny vyvážený rez

- Nech V_1, V_2 je prípustné riešenie. Lokálna transformácia spočíva vo výbere dvoch vrcholov $a \in V_1, b \in V_2$ a ich vzájomnej výmene
- Aplikáciou výmeny $a \longleftrightarrow b$ sa zníži/zmení cena rezu o hodnotu $\Delta(a, b)$

$$\Delta(a,b) = \sum_{\substack{\{a,v\}\in E \\ v\in V_2\setminus\{b\}}} c(a,v) - \sum_{\substack{\{a,v\}\in E \\ v\in V_1}} c(a,v) + \sum_{\substack{\{b,v\}\in E \\ v\in V_1\setminus\{a\}}} c(b,v) - \sum_{\substack{\{b,v\}\in E \\ v\in V_2}} c(b,v)$$

- nové prípustné riešenie je najlepšie spomedzi tých, ktoré získame postupnosťou n zámen

Algoritmus 11 iterácia Min-Balanced-Cut

//predpokladámne, že nejaké rozdelenie V_1, V_2 už máme
1: $U_1 \leftarrow V_1; U_2 \leftarrow V_2$
2: $X \leftarrow V$
3: **for** i=1,n **do**
4: vyber vrcholy $a_i \in U_1 \bigcap X, b_i \in U_2 \bigcap X$ pre kt. je $\Delta(a,b)$ maximálna
5: $U_1 \leftarrow (U_1 \setminus \{a_i\}) \cup \{b_i\}$
6: $U_2 \leftarrow (U_2 \setminus \{b_i\}) \cup \{a_i\}$
7: $X \leftarrow X \setminus \{a_i, b_i\}$
8: vyber k maximalizujúce $\sum_{i=1}^{k} \Delta(a_i, b_i)$
9: aplikovaním postupnosti zmien $a_i \leftrightarrow b_i, \ldots, a_k \leftrightarrow b_k$ na V_1, V_2 získaj V_1', V_2'
10: return (V_1', V_2')

KL-LSS a TSP

Druhým príkladom použitia metódy prehľadávania s variabilnou hĺbkou je použitie pre **TSP**[12]. Vychádzame z existujúcej hamiltonovskej kružnice α. V iterácii sa snažíme nájsť dve rovnako dlhé postupnosti hrán také, že jedna z nich obsahuje len hrany z α a druhá zas len hrany mino α, pričom ich vzájomná výmena zachová HK ($\alpha \rightsquigarrow \alpha'$) a zníži jej cenu. Hľadáme teda $C = (p_1, q_1), \ldots, (p_k, q_k)$, $C' = (s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$ tak, že

1. p_i, q_i sú v α susedné, $1 \leq i \leq k$
2. s_i, t_i nie sú v α susedné, $1 \leq i \leq k$
3. $q_i = s_i$, $1 \leq i \leq k$
4. $t_i = p_{i+1}$, $1 \leq i \leq k-1$
5. $t_k = p_1$
6. $\alpha \setminus C \cup C'$ vytvorí novú HK α' kratšej dĺžky

kvalita vs. zložitosť

Ak máme NP ťažké problémy, nemôžme očakávať, že by metóda lokálneho prehľadávania viedla k polynomiálnemu riešeniu. Jej zložitosť môžme vyjadriť ako

(čas hľadania v množine susedov) × (počet vylepšení)

[12] problém obchodného cestujúceho

Algoritmus 12 iterácia TSP

1: $\Delta = 0, k = 1$, (p_1, q_1) je dvojica vrcholov susedných v α
2: $C \leftarrow \{(p_1, q_1)\}$; $s_1 \leftarrow q_1$, $i \leftarrow 1$
3: **loop** nájdi vrcholy x, y susedné v α také, že
4: nepatria do C
5: ak $i+1$ hrán $(p_1, q_1), \ldots, (p_k, q_k)$, (x, y) nahradíme hranami $(s_1, t_1), \ldots, (s_i, x)$, (y, p_1) tak z α vznikne HK α'
6: $\Delta + c(p_i, q_i) + c(x, y) - c(p_1, y) - c(s_i, x) > 0$
7: **if** také x, y existujú **then**
8: $t_i = p_{i+1} = x$, $q_{i+1} = s_{i+1} = y$, $k \leftarrow i + 1$
9: $i \leftarrow i + 1$
10: **if** $k > 1$ **then** substituuj v α k hrán $(p_1, q_1), \ldots, (p_k, q_k)$ za $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$
11: return(α)

Mohli by sme sa pýtať

> *Pre ktoré NP ťažké problémy môžme nájsť susednosť f_x polynomiálnej veľkosti tak, aby LSS_{f_x} dávalo vždy optimálne riešenie?*
> (pozor, nehovoríme o polynomialite celého riešenia!)

presná susednosť(okolie)

Definícia 2.6 *Nech $U = (I, Sol, cena, ciel)$ je optimalizačný problém, f určuje susednosť/okolie na U. Hovoríme, že f je* presná susednosť/okolie, *ak $\forall x \in I$ je každé lokálne optimum pre x podľa f_x optimálnym riešením pre x.*

polynomiálna prehľadávanie

Susednosť f je polynomiálne prehľadávanie *ak existuje polynomiálny algoritmus, ktorý $\forall x \in I$ a $\forall \alpha \in Sol(x)$ nájde jedno z najlepších prípustných riešení v $f_x(\alpha)$.*

Uvedomme si, že polynomiálne prehľadávanie nezaručuje polynomiálnu veľkosť množiny susedov!

Ďalšou zmysluplnou otázkou je otázka existencie presnej susednosti pre U, ktorá by bola aj polynomiálnym prehľadávaním. Kladná odpoveď by hovorila, že všetko záleží od počtu iterácií. Negatívna odpoveď zas znamená, že nevieme polynomiálnym prehľadávaním garantovať optimálne riešenie.

Existujú metódy, ako dokázať, že problém je z hľadiska lokálneho prehľadávania ťažký. Prvá využíva pojem ohraničenej ceny.

Definícia 2.7 *Nech $U = (I, Sol, cena, ciel)$ je celočíselný optimalizačný problém. Hovoríme, že U má* ohraničenú cenu, *ak $\forall I \in I$ $Int(I) = (i_1, \ldots, i_n), i_j \in N$*

$$cena(\alpha) \leq \sum_{j=1}^{n} i_j \text{ pre } \alpha \in Sol(I)$$

Uvedená podmienka je celkom prirodzená, väčšinou je ohraničujúca funkcia súčtom nejakej podmnožiny hodnôt zo vstupu.

Analógiou triedy NP pre optimalizačné problémy je trieda NPO.

NPO

Definícia 2.8 *Nech $U = (I, Sol, cena, ciel)$ je optimalizačný problém. $U \in$ NPO ak platia nasledovné podmienky:*

1. *$I \in P$*
2. *existuje polynóm p taký, že*
   - *$\forall x \in I, y \in M(x)$, $|y| \leq p(|x|)$*
   - *existuje polynomiálny algoritmus, ktorý $\forall x \in I$ a $y \in \Sigma_O^*$ dĺžky $|y| \leq p(|x|)$ rozhodne, či $y \in M(x)$*

3. účelová funkcia cena sa počíta v polynomiálnom čase

Ak pre NPO problém existuje deterministický polynomiálny algoritmus, ktorý počíta optimálne riešenie, potom problém patrí do PO. *PO*

Veta 2.10 *Nech $U \in$ NPO je celočíselný optimalizačný problém s ohraničenou cenou taký, že existuje polynomiálny algoritmus $\mathcal{B}$, ktorý každému vstupu vypočíta nejaké prípustné riešenie. Ak P $\neq$ NP a U je silno NP-ťažký, tak pre U neexistuje presná susednosť, ktorá je polynomiálnym prehľadávaním.*

Dôkaz: Kvôli sporu predpokladajme, že existuje presné okolie, ktoré je polynomiálnym prehľadávaním. Podľa definície existenciu polynomiálneho prehľadávania potvrdzuje existencia polynomiálneho algoritmu $\mathcal{A}$, ktorý prípustnému riešeniu α v polynomiálnom čase vypočíta nezhoršené prípustné riešeni β. Využijeme algoritmy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ pri konštrukcii pseudopolynomiálneho algoritmu pre silno NP-ťažký (minimalizačný) problém U. Vieme, že existencia pseudopolynomiálneho algoritmu pre silno NP-ťažký problém potom vedie k sporu s predpokladom P $\neq$ NP.

Algoritmus 13 A_U- pseudopolynomiálny algoritmus pre silno NP-ťažký problém

```
1: pomocou B nájdi prípustné riešenie α ← B(x)
2: β ← A(α)
3: while α > β do
4:     α ← β
5:     β ← A(α)
6: return α
```

- Keďže $U \in NPO$, je dĺžka $|\alpha|$ polynomiálna od dĺžky vstupu $|x|$.
- Algoritmy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sú polynomiálne, preto sú polynomiálne aj od $|x|$
- Nech $Int(x) = (i_1, \ldots, i_n)$. Keďže U je celočíselný problém s ohraničenou cenou, cena prípustného riešenia $\in \{1, 2, \ldots \sum_{j=1}^{n} i_j\} = \{1, 2, \ldots n \times MaxInt(x)\}$. Každé vylepšenie znamená vylepšenie aspoň o 1, preto je počet iterácií nanajvýš $|x| \times MaxInt(x)$

□

Dôsledok 2.11 *Ak $P \neq NP$, tak neexistuje presná susednosť, ktorá je polynomiálnym prehľadávaním, pre žiaden z problémov $TSP, \Delta - TSP$*

suboptimálny rozhodovací problém

Definícia 2.9 *Nech $U = (I, Sol, cena, ciel)$ je optimalizačný problém z NPO. Pre U definujeme* suboptimálny rozhodovací problém

$$SUBOPT_U = \{(x, \alpha) \mid x \in I, \alpha \in Sol(x) \text{ a } \alpha \text{ nie je optimálne}\}$$

Veta 2.12 *Nech $U \in NPO$. Ak $P \neq NP$ a $SUBOPT_U$ je NP-ťažký, tak pre U neexistuje presná susednosť, ktorá je polynomiálnym prehľadávaním.*

2.7 Heuristiky založené na lokálnom prehľadávaní

Metódu lokálneho prehľadávania využívame najmä pri riešení optimalizačných úloh. Opakovanie jednotlivých iterácií umožňuje prechod od jedného prípustného riešenia α k druhému β vtedy, ak tento prechod znamená zlepšenie. Tento princíp je mierne porušený pri prehľadávaní s variabilnou hĺbkou, keď niekoľko pokusov v rámci jednej iterácie umožňuje uvažovať aj dočasné zhoršenie. Princíp dočasného zhoršenia využívajú aj *heuristika simulovaného žíhania*, *genetické algoritmy* a *tabu search*.

2.7.1 Simulované žíhanie

V najjednoduchšej verzii tejto metódy je definovaná (potenciálne nekonečná) postupnosť $t_1, t_2, \ldots, t_i > 0$, *prahových hodnôt*, ktoré určujú podmienky na prechod riešenia α k riešeniu β. V k-tom kroku algoritmu lokálneho vyhľadávania (predpokladáme, že máme problém minimalizácie) je tento prechod umožnený, ak $cena(\beta) - cena(\alpha) < t_k$. Pozitívna hodnota t_k umožňuje akceptovať aj zhoršenie, nulový prah zas definuje úlohu lokálneho prehľadávania.

Vo všeobecnosti využívame postupnosti, v ktorých prahové hodnoty monotónne klesajú. Navyše, pre každé $\epsilon > 0$ existuje také i, že $t_i \leq \epsilon$. Výpočet končí po k krokoch, ak pre aktuálne prípustné riešenie α a všetky s ním susediace prípustné riešenia β je $cena(\beta) - cena(\alpha) \geq t_{k+1}$.

pravidlo ukončenia

Ak prechod od lepšieho riešenia k horšiemu akceptujeme s pravdepodobnosťou inverzne proporcionálnou rozdielu $cena(\beta) - cena(\alpha)$, resp. s pravdepodobnosťou t_i, hovoríme o simulovanom žíhaní. Názov metódy súvisí s podobnosťou s fyzikálnym procesom žíhania(kalenia).

Metóda má štyri voľné parametre, ktorých vhodné nastavenie ovplyvňuje úspešnosť. Nastavujú sa väčšinou experimentálne v procese ladenia metódy. Okrem toho určujeme aj podmienku ukončenia:

parametre

t-teplota
r-rýchlosť znižovania teploty
ℓ-počet testovaných prvkov v okolí
Δ-kritérium ukončenia

Algoritmus 14 simulované žíhanie

```
                                //predpokladáme vstupnú inštanciu x minimalizačného problému U
 1: τ ← t; s ← počiatočné prípustné riešenie
 2: repeat
 3:     for ℓ krát do
 4:         vyber nenavštívené s' ∈ M(x)
 5:         δ ← cena(s') − cena(s)
 6:         if δ < 0 then
 7:             s ← s'
 8:         else s ← s' s pravdepodobnosťou e^(−δ/π)
 9:     τ ← r · τ
10: until Δ
11: return s
```

2.7.2 Genetické algoritmy

Motiváciou pre tento typ heuristiky je biológia. Genetický algoritmus udržiava *populáciu* riešení, ktorá sa vyvíja cez *generácie*. V každom kroku sa nová poplulácia

danej veľkosti maximálne N generuje z pôvodnej, pričom susednosť sa definuje náhodným aplikovaním pravidiel motivovaných genetickými zmenami, ako mutácia, kríženie,... Do ďalšej generácie prechádzajú najsilnejší jedinci. Táto metóda je vhodná aj na paralelné spracovanie.

Typicky sa nová generácia počíta v troch fázach:

Vyhodnotenie kvality Kvalita riešenia v populácii sa vyhodnotí vhodne definovanou funkciou

Výber Riešenie prechádza do novej generácie s pravdepodobnosťou úmernou jeho kvalite

Generovanie nových riešení Ak do novo vygenerovanej generácie prešlo menej ako určený počet N jedincov/riešení, tak sa generácia doplní o nové riešenia, ktoré vzniknú rekombináciou (crossover) resp.modifikáciou (mutation) niektorých riešení.

Riešenia udržiavame väčšinou ako binárne reťazce. Operácie sa potom realizujú nasledovne

crossover nová dvojica reťazcov β_1, β_2 vznikla z riešení α_1, α_2 zámenou prefixu reťazca α_1 dĺžky i za suffix reťazca α_2 dĺžky i pre náhodne vygenerované i, $1 \leq i \leq |\alpha_1| = |\alpha_2|$

mutation bit po bite sa každý bit s danou pravdepodobnosťou preklopí

minimálny vyvážený rez Rez je určený rozkladom (V_1, V_2) množiny vrcholov $V = \{v_1, \ldots, v_{2n}\}$. Riešenie udržiavame ako binárny vektor α dĺžky $2n$, kde $\alpha_i = 1$ znamená príslušnosť v_i do V_1, $\alpha_i = 0$ zas indikuje príslušnosť v_i do V_2.

Kvalita riešenia je daná funkciou Ψ

$$\Psi(\alpha) = C - \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} c_{ij}\alpha_i(1-\alpha_j) + K|n - \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i|$$

kde c_{ij} je cena hrany (v_i, v_j), K je dostatočne veľká konštanta, ktorej úlohou je znížiť kvalitu neprípustných riešení a C je konštanta, ktorá umožňuje kvalitu maximalizovať.

2.7.3 Tabu search

Podobne ako pri simulovanom žíhaní sa pri prehľadávaní okolia môžme náhodne rozhodnúť o akceptovaní horšieho riešenia, sofistikovanejšie je prehľadávanie.

1. pre riešenie s označuje $\Delta(s)$ množinu transformácií, ktoré sa naň môžu aplikovať. Funkcia σ^* definovaná na podmnožinách $S \subseteq \Delta(s)$ vráti najlepšiu transformáciu $\sigma^*(S) \in \Delta(s)$
2. Počas výpočtu si udržiavame množinu $\mathcal{T}$ zakázaných transformácií. Veľkosť tejto množiny určuje parameter t.
3. V každom kroku poznáme najlepšie doteraz nájdené riešenie. Nájdeme najlepšie riešenie, ktoré vieme dostať z aktuálneho riešenia aplikovaním povolenej, teda non-tabu operácie. $\mathcal{T}$ aktualizujeme.
4. Výpočet končí, keď $\Delta(s) = \mathcal{T}$ alebo sme v predchádzajúcih k krokoch nenašli zlepšujúce riešenie.

Príklad 2.7 *Uvažujme problém* k-min-tree*: V neorientovanom ohodnotenom grafe $G = (V, E, c)$, kde c je funkcia, ktorá každej hrane určuje cenu, máme identifikovať podstrom minimálnej ceny s k hranami.*

1. *greedy Metódou nájdeme nejaké prípustné riešenie: začneme s hranou minimálnej ceny a pridávame postupne hrany s monotónne rastúcou cenou tak, že strom narastá. Hodnotu aj strom si pamätáme ako najlepšie riešenie* $(T^*, c(T^*))$.
2. *Treba určiť susednosť, resp.množinu povolených operácií. Vychádzame z operácie* swap*, ktorá robí výmenu hrany zo stromu za hranu nestromovú, pričom do operácie vstupujú len "netabuizované" hrany. Myslíme tým hrany, ktorých stav nie je Tabu-aktívny, resp. sú mimo množiny TABU. (Mohli by sme uvažovať aj iné kritérium, keď by swap bol zakázaný len vtedy, keď sú obe hrany tabu-aktívne.)*

   Uvažuje sa statický swap-keď sa nemení množina vrcholov stromu a dynamický, keď množinu vrcholov meniť môžme.
3. *Ak najlepší swap vedie k zníženiu ceny, nové riešenie akceptujeme a ak je jeho cena lepšia ako doteraz najlepšia, zaktualizujeme* $(T^*, c(T^*))$. *Ak nedošlo k vylepšeniu momentálneho riešenia, nastavíme hrany, ktoré sa swapu zúčastnili, ako tabu-aktívne s vhodnou dĺžkou trvania* ℓ. *Pre hranu, ktorú sme odstraňovali, hodnota* ℓ *určuje, koľko nasledujúcich kôl ju nemôžme vložiť, pre tú, ktorú sme vložili,* ℓ *označuje počet kôl, ktoré má v uvažovanom strome zotrvať. Tieto hodnoty môžu byť rôzne*[13]
4. *Vhodne treba nastaviť kritérium ukončenia*

2.7.4 Problém prideľovanie úloh: využitie branch-and-bound a simulovaného žíhania

Uvažujme Job-shop-scheduling:

vstup

m strojov $M_1, \ldots, M_m$
n zadaní(jobov) $J_1, \ldots, J_n$; predpokladáme, že job musí prejsť cez príslušné stroje v presne určenom poradí
p(i,j) - trvanie spracovania úlohy j na stroji i. Predpokladáme, že hodnoty $p(i,j)$ poznáme dopredu.

úloha

minimalizovať dĺžku C_{max} celkového spracovania

Problém formulujeme grafom $G(N, X, Y)$, kde

N sú operácie, ktoré treba vykonať $\{(1,2),(1,4),\ldots\}$

X sú hrany popisujúce poradie realizácie operácií pre jednotlivé joby
$(i,j) \rightarrow (k,j) \in X$ hovorí, že v jobe j spracovanie na stroji i predchádza spracovanie na stroji k

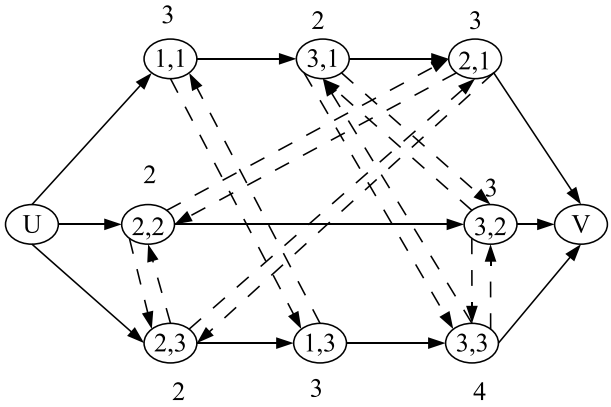
Pridávame hrany $U \longrightarrow$ do prvej operácie každého jobu, z poslednej operácie každého jobu $\longrightarrow V$

Y sú hrany, ktoré popisujú konflikty jednotlivých operácií na strojoch (nemôžu ísť dve operácie na jednom stroji naraz)

$(i,j) \dashrightarrow (i,\ell), (i,\ell) \dashrightarrow (i,j) \in Y$, hovoria, že úlohy j, ℓ nemôžu ísť na stroji i naraz

job	postupnosť strojov	čas spracovania
1	1, 3, 2	$p(1,1)=3, p(3,1)=2, p(2,1)=3$
2	2, 3	$p(2,2)=2, p(3,2)=3$
3	2, 1, 3	$p(2,3)=2, p(1,3)=3, p(3,3)=4$

[13] Hodnote ℓ sa hovorí tabu tenure



Výberom rozumieme taký podgraf $D \subseteq Y$, v ktorom je z každej dvojice (i,j) --→ $(i,\ell),(i,\ell)$ --→ (i,j) práve jedna hrana. Ak D spolu s hranami X je acyklický, tak máme *prípustný výber*, presnejšie jeho grafickú reprezentáciu.

Z každého prípustného výberu vieme určiť rozvrh, a teda prípustné riešenie.[14] Keď máme nejaký prípustný výber, tak najdlhšia $U-V$ cesta určuje makespan a hovoríme jej *kritická*. Pod dĺžkou pritom rozumieme súčet časov spracovania vo vrcholoch na nej.

aktívny rozvrh

Jedným prístupom je generovanie všetkých *aktívnych rozvrhov* a z nich potom vyberieme najlepšie. Aktívny rozvrh je taký rozvrh, ktorý nemôžme vylepšiť—žiadna operácia nemôže byť dopočítaná skôr bez toho, aby inú zdržala—alternáciou operácií na strojoch. Všetky aktívne rozvrhy môžme generovať algoritmom Aktívny rozvrh:

Algoritmus 15 Aktívny rozvrh

Ω množina operácií, ktorých predchodcovia už sú zaradení; $\Omega' \subseteq \Omega$
$r_{i,j}$ najskorší možný začiatok pre operáciu (i,j)
D' graf, ktorý odpovedá priebežnému rozvrhu

1. inicializácia:
   Ω :=prvá operácia pre každý job
   $r_{i,j} := 0 \forall (i,j) \in \Omega$
   D' obsahuje všetky X-hrany a žiadne Y-hrany.
2. Výber stroja:
   vypočítaj $t(\Omega)$ aktuálneho rozvrhu
   $$t(\Omega) = \min\{r_{i,j} + p(i,j) | (i,j) \in \Omega\}$$
   a index stroja i^*, ktorý tú hodnotu minimalizuje
3. branching
   $\Omega' = \{(i^*,j) | r_{i^*,j} < t(\Omega)\}$
   - $\forall (i^*,j) \in \Omega'$ rozšír čiastočný rozvrh o zaradenie (i^*,j) na stroj i^* a súčasne odstráň (i^*,j) z Ω.
   - zaraď nasledovníka (i^+,j) práve pridelenej operácie (i^*,j) do Ω a vypočítaj $r_{i^+,j}$; túto hodnotu získame ako hodnotu najdlhšej $U-(i^+,j)$ cesty v aktuálnom $G(D')$
   - goto 2

[14] Napíšte program, ktorý to spraví.

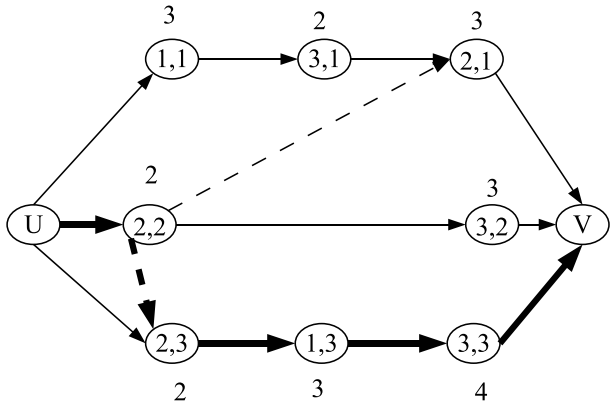
Rozvetvenie v kroku 3 vyberá priradenie prípustnej operácie na stroj i^*. Počet vetiev je rovný počtu prípustných operácií v Ω'; konkrétny výber vlastne fixuje niektoré výberové Y-hrany, ktoré pribúdajú do D'.

Ako získavame dolný odhad? Označme $G(D')$ ten kombinovaný graf pre aktuálny výber D. Jednoduchý dolný odhad LB je cena kritickej cesty.
Vieme získať aj vyšší dolný odhad. Uvažujme dopočítanie úlohy z pohľadu jedného stroja, keď ostatným "dovolíme", aby počítali viac úloh naraz. Odpovedá to situácii, že existujú dvojice operácií, pre ktoré sme nezafixovali/nevybrali jednu z dvojice odpovedajúcich Y-hrán. Uvedomme si, že tento predpoklad hodnotu dolného (aj horného) odhadu vlastne znižuje. Zaujíma nas maximálne spomalenie L_{max}. K hodnote jednoduchého odhadu LB potom pripočítame (maximalizované cez stroje) cenu dokončenia na izolovanom stroji.

1. vypočítaj dolný odhad LB ako cenu kritickej cesty v $G(D')$
2. pre všetky operácie (i,j) na stroji i vypočítaj $r_{i,j}$, čo je ekvivalentné najdlhšej $U \longrightarrow (i,j)$ ceste v $G(D')$
3. vypočítaj minimálny čas $\Delta_{i,j}$ medzi začiatkom realizácie operácie (i,j) a koncom rozvrhu; je to najdlhšia $(i,j) \longrightarrow V$ cesta v $G(D')$. Nutný čas $d_{i,j}$ je potom
$$d_{i,j} = LB - \Delta_{i,j} + p(i,j)$$
4. pre každý stroj zvlášť vypočítaj minimalizované oneskorenie L_j a potom
$$LB^{new} = LB + \max L_j$$

Tento dolný odhad používame ako usmernenie, kam máme pokračovať.

Riešenie:
úroveň 0 $\Omega = \{(1,1),(2,2),(2,3)\}$
$t(\Omega) = 2$; $i^* = 2$
$\Omega' = \{(2,2),(2,3)\}$
Koreň bude mať 2 synov-operácie (2,2) s (2,3). Každému synovi vypočítame odpovedajúci graf D', ktorý vznikne z grafu tvoreného X-hranami pridaním odpovedajúcich Y-hrán.
úroveň 1 vrchol (2,2)– na stroj $M2$ sme zaradili operáciu $(2,2)$. Pridáme preto do D' hrany $(2,2)$ --→ $(2,1)$ a $(2,2)$ --→ $(2,3)$.



Dolný odhad LB=l(U,(2,2),(2,3),(1,3),(3,3),V)=11.

Doriešime problém pre stroj M_i zvlášť, aby sme vylepšili dolný odhad. Príslušné údaje pre rozhodovanie

$job1$	$job3$
$r_{11}=0$	$r_{13}=4$
$\Delta_{11}=8$	$\Delta_{13}=7$
$d_{11}=6$	$d_{13}=7$

Rozvrh na M_1 bude takýto: (1,1) začne v čase 0, skončí 3; (1,3) začne v čase 4, skončí 7. V oboch prípadoch je to skôr ako príslušný nutný čas, preto $L_1=0$.

$job1$	$job2$	$job3$
$r_{21}=5$	$r_{22}=0$	$r_{23}=2$
$\Delta_{21}=3$	$\Delta_{22}=11$	$\Delta_{23}=9$
$d_{21}=11$	$d_{22}=2$	$d_{23}=4$

Rozvrh na M_2 bude takýto: (2,1) začne v čase 5, skončí 8; (2,2) začne v čase 0, skončí 2, (2,3) začne v 2, skončí v 4. Všetky operácie skončia skôr ako príslušný nutný čas, preto $L_2=0$.

$job1$	$job2$	$job3$
$r_{31}=5$	$r_{32}=2$	$r_{33}=7$
$\Delta_{31}=5$	$\Delta_{32}=3$	$\Delta_{33}=4$
$d_{31}=8$	$d_{32}=11$	$d_{33}=11$

Rozvrh na M_3 bude takýto: (3,1) začne v čase 3, skončí 5; (3,2) začne v čase 5, skončí 7, (3,3) začne v 7, skončí v 11. Všetky operácie skončia skôr ako príslušný nutný čas, preto $L_3=0$.

Nový dolný odhad teda je

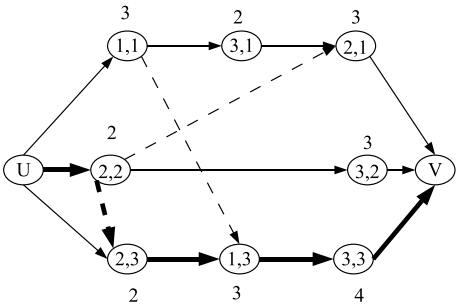
$$LB^{new} = LB + \max L_i = 11$$

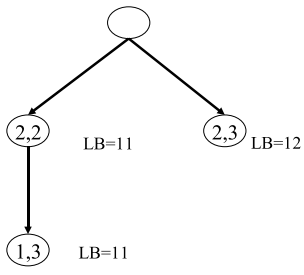
Uvedomme si, že sme dopočítali operáciám začiatky $r_{i,j}$, ktoré platia pre výpočet ďalšej úrovne v tejto vetve. Pokračujeme teda vo výpočte tejto vetvy. Odstránime operáciu $(2,2)$ z Ω a zaradíme do Ω jej X-nasledovníka $(3,2)$.

$\Omega = \{(1,1),(3,2),(2,3)\}$
$t(\Omega)=3$; $i^*=1$
$\Omega' = \{(1,1)\}$

Vrchol (2,2) má jedného syna-(1,1).

úroveň 2 Zaradenie operácie (1,1) na stroj M_1 si vynucuje pridanie Y-hrany $(1,1) \dashrightarrow (1,3)$ do D'





Dolný odhad LB=l(U,(2,2),(2,3),(1,3),(3,3),V)=11.....

Úloha: Presvedčte sa, že hodnota LB pre vrchol (2,3) na úrovni 1 je naozaj 12

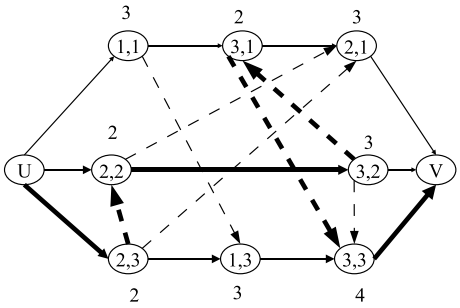
simulované žíhanie

Riešme ten istý problém simulovaným žíhaním. Nastavíme počiatočnú teplotu $T=100$, parameter α, ktorý modifikuje teplotu, nastavíme $\alpha=0.95$ a hranicu pravdepodobnosti na akceptovanie $\epsilon=0.98$.

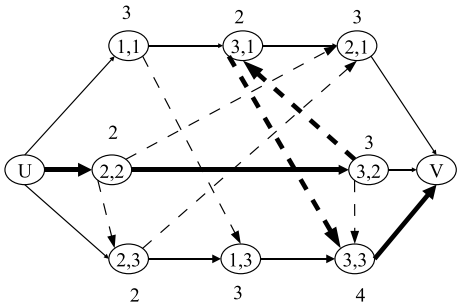
i=0 Nastavíme prípustné riešenie a v ňom nájdeme kritickú cestu. Jej cena určuje energiu $E(0)=13$

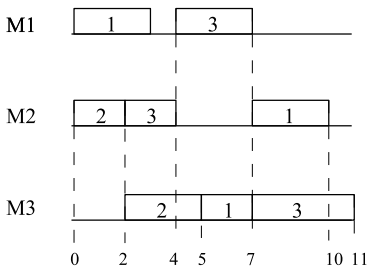
Algoritmus 16 Simulované žíhanie

1. zvoľ dostatočne veľkú teplotu $T = T_0$
2. zvoľ vhodný parameter redukcie α, $0 < \alpha < 1$
3. nastav v grafe D prípustné riešenie
4. nastav počiatočnú energiu $E(i)$ako cenu kritickej cesty
5. kým je T v rozumnom rozsahu opakuj
   - zmeň orientáciu niektorej Y-hrany na kritickej ceste
   - vypočítaj novú energiu $E(j)$ a odpovedajúcu zmenu ΔE
   - ak $\Delta E < 0$, akceptuj nový stav
   - ak $\Delta E > 0$, akceptuj nový stav ak $e^{-\Delta E/T} > \epsilon$
   - $T \leftarrow T \cdot \alpha$

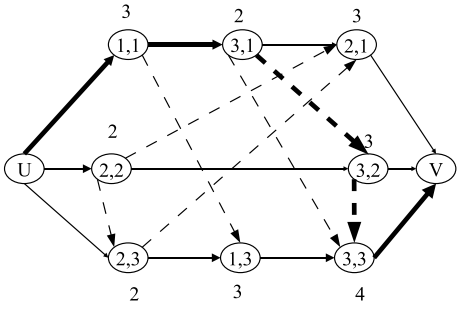


i=1 nové riešenie vznikne otočením orientácie jednej z Y-hrán na kritickej ceste; napr $(2,3) \dashrightarrow (2,2)$ zmeníme na $(2,2) \dashrightarrow (2,3)$. Kritická cesta sa zmení, jej cena určuje novú energiu $E(1) = 11$. $T \leftarrow \alpha \cdot T = 95$. Keďže $\Delta E = 11 - 13 = -2 < 0$, túto zmenu akceptujeme:

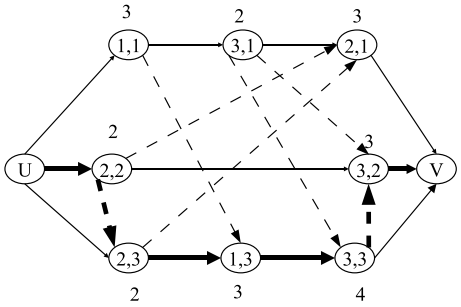




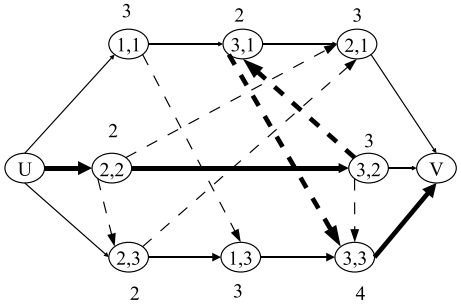
i=2 nové riešenie vznikne otočením orientácie jednej z Y-hrán na kritickej ceste; napr $(3,2) \dashrightarrow (3,1)$ zmeníme na $(3,1) \dashrightarrow (3,2)$. Kritická cesta sa zmení, jej cena určuje novú energiu $E(2) = 12$. $T \leftarrow \alpha \cdot T = 90.25$ Keďže $\Delta E = 12 - 11 = 1 > 0$, o akceptovaní zmeny rozhoduje hodnota $Pr(akc) = e^{-\Delta E/T} = e^{-1/90.25} = 0.9890 > \epsilon$ túto zmenu akceptujeme.



i=3 nové riešenie vznikne otočením orientácie jednej z Y-hrán na kritickej ceste; napr $(3,2)$ --→ $(3,3)$ zmeníme na $(3,3)$ --→ $(3,2)$. Kritická cesta sa zmení, jej cena určuje novú energiu $E(2) = 14$. $T \leftarrow \alpha \cdot T = 85.7375$ Keďže $\Delta E = 14-12 = 2 > 0$, o akceptovaní zmeny rozhoduje hodnota $Pr(akc) = e^{-\Delta E/T} = e^{-2/85.7375} = 0.9769 < \epsilon$ túto zmenu *neakceptujeme*.



Vrátime sa k situácii na konci kroku pre $i = 2$ a skúsime otočiť inú Y-hranu. Keďže to nejde, je koniec. Riešenie s minimálnou energiou je v úrovni 1



Kapitola 3

Pravdepodobnostné výpočty

Pokračujeme v riešení problémov, ktoré sú ťažké. Treba rozlišovať medzi *neviem* a *nedá sa*

- To, že *nevieme* nejaký problém riešiť lepšie znamená, že momentálne nemáme lepší algoritmus. Nehovorí to nič o tom, či lepší algoritmus v princípe môže alebo nemôže existovať.
- Naproti tomu tvrdenie, že sa niečo *nedá* lepšie riešiť v sebe zahŕňa existenciu dôkazu, že to lepšie nejde.

Formálne sú problémy v NPÚ také, ktoré *nevieme* riešiť deterministickými polynomiálnymi algoritmami. Napriek tomu to v praxi znamená, že k nim pristupujeme tak, akoby sa riešiť lepšie *nedali*.

Randomizácia sa stala štandardným prístupom v návrhu algoritmov. Takéto algoritmy sú zaujímavé hlavne kvôli svojej efektívnosti a jednoduchosti. A to aj napriek strate stopercentnej spoľahlivosti – riešenie s malou pravdepodobnosťou nie je korektné, resp. ho nedostaneme.

Kľúčovým pojmom pre tvorbu a pochopenie pravdepodobnostných(randomized) algoritmov je pojem náhody. Pri definovaní/popisovaní pojmu náhody máme väčšinou tendenciu povedať, že je to udalosť, ktorej výsledok nevieme predpovedať. V tejto súvislosti je dobré si uvedomiť, že hádzanie kockou ani točenie ruletou vlastne náhodnými nie sú - platia tam fyzikálne zákony, takže by sa principiálne dalo vypočítať, čo padne.

3.1 Príklady

Začnime niekoľkými príkladmi pravdepodobnostných algoritmov.

3.1.1 Rovnosť databáz

Majme dva vzdialené počítače, pričom každý z nich udržiava "databázu údajov". Pod databázou údajov teraz rozumieme binárne reťazce $X = x_1x_2 \dots x_n$, resp. $Y = y_1y_2 \dots y_n$. Chceme vedieť, či sú tieto "databázy" totožné. Keďže vyžadujeme korektný prenos správ, snažíme sa o minimalizáciu komunikácie medzi počítačmi—čo najmenší počet prenesených bitov.

Ak chceme problém riešiť deterministicky, lepšie ako poslanie celej informácie – teda celého binárneho reťazca X dĺžky n – jedného počítača tomu druhému v princípe nenájdeme. Dá sa to dokázať (pokúste sa o dôkaz).

Ak však pripustíme, že nie každá odpoveď musí byť na 100% korektná, môžme použiť jednoduchý pravdepodobnostný algoritmus 17; R_1 (R_2) označuje protokol prvého (druhého) počítača. Idea algoritmu je jednoduchá - binárne reťazce budeme porovnávať ako binárne čísla na základe zvyšku po delení náhodným prvočíslom[1]: rôzny zvyšok garantuje, že čísla (reťazce) sú rôzne, rovnaký zvyšok po delení nám 100% istotu nedáva. Ukážeme však, že rozumná voľba prvočísla poskytuje malú pravdepodobnosť chyby.

Algoritmus 17 základný RP

//počítač R_x má reťazec X, počítač R_y reťazec Y

začína R_x

1: náhodne vyberie prvočíslo p v intervale $0..n^2$
2: nech $num(X)$ označuje číslo s binárnym zápisom X;
3: vypočíta číslo $RX \leftarrow num(X) \mod p$
4: pošle RX, p druhému počítaču

pokračuje R_y

1: po prijatí RX, p druhý počítač vypočíta $RY \leftarrow num(Y) \mod p$
2: **if** $RX = RY$ **then** return "$X = Y$"
3: **else** return "$X \neq Y$"

počet bitov

Počas spoločného výpočtu podľa základného algoritmu RP prekomunikovali tieto dva počítače toľko bitov, koľko bolo treba na prenos čísel RX, p. Vzhľadom k tomu, že $RX \leq p < n^2$, je dĺžka posielanej správy zrejme

$$2 \cdot \lceil \log_2 n^2 \rceil \leq 4 \cdot \lceil \log_2 n \rceil$$

Pri hodnote $n = 10^{16}$ je dĺžka prekomunikovanej správy nanajvýš $4 \cdot 16 \cdot \lceil \log_2 10 \rceil = 256$. Správu takejto veľkosti dokážeme preniesť bezpečne.

korektnosť

Ľahko vidno, že negatívna odpoveď $X \neq Y$ je vždy pravdivá. V prípade pozitívnej odpovede $X = Y$ to neplatí. Môže sa totiž stať, že aj keď sú reťazce X, Y, a teda čísla $num(X), num(Y)$, rôzne, zvyšky po delení prvočíslom p majú rovnaké.

$$num(X) \bmod p = num(Y) \bmod p \iff |num(X) - num(Y)| \bmod p \equiv 0$$

Aby sme určili pravdepodobnosť, s akou sme sa dopustili chyby v prípade pozitívnej odpovede, spočítame počet tzv. "zlých" prvočísel; zlým prvočíslom máme na mysli to, ktoré delí rozdiel $|num(X) - num(Y)|$. Potom hľadaná pravdepodobnosť je

$$\frac{\text{počet zlých prvočísel}}{\text{počet všetkých možných prvočísel}} \tag{3.1}$$

Začnime ohraničením počtu zlých prvočísel. Prvočíslo p je zlé vzhľadom na X, Y ak $|num(X) - num(Y)|$ je deliteľné p. Keďže oba binárne reťazce X, Y sú dĺžky n, môžme odhadnúť veľkosť rozdielu $|num(X) - num(Y)|$ nasledovne

$$W = |num(X) - num(Y)| < 2^n$$

Každé zlé prvočíslo delí W, preto horný odhad na počet zlých prvočísel môžme odhadnúť na základe faktorizácie:

$$W = p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{i_k}, 2 \leq p_1 < p_2 < \ldots < p_k$$

Uvedomme si, že maximálna možná hodnota k je horným odhadom na počet zlých prvočísel. Spojením

$$2^n > W = p_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{i_k} \geq p_1 \cdot \ldots \cdot p_k \geq 2^k$$

[1] prvočíslo vyberáme náhodne spomedzi prvočísel menších ako n^2

pre počet k zlých prvočísel dostávame

$$\boxed{k \leq n-1}$$

Označme $PRIM(m)$ množinu prvočísel nanajvýš veľkosti m a $Prim(m) = |PRIM(m)|$. Predstavu o hodnote $Prim(m)$ dáva Lema 3.1, ktorú uvádzame bez dôkazu.

Lema 3.1 *Prim(m)*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{Prim(m)}{m/\ln m} = 1$$

$$Prim(m) > \frac{m}{\ln m},\ m > 67$$

Dosadením odhadu pre $Prim(n^2)$ do (3.1) dostávame

$$\frac{\text{počet zlých prvočísel}}{\text{počet všetkých možných prvočísel}} = \frac{n-1}{Prim(n^2)} \leq \frac{n-1}{n^2/\ln n^2} \leq \frac{\ln n^2}{n} = \frac{2\ln n}{n}$$

Pravdepodobnosť chybnej odpovede pre $X \neq Y$ je teda nanajvýš $\frac{2\ln n}{n}$, čo pre $n = 10^{16}$ je nanajvýš $0.36892 \cdot 10^{-14}$.

Pravdepodobnosť nesprávnej odpovede môžme znížiť niekoľkonásobným *nezávislým* zopakovaním výberu prvočísla v základnom algoritme RP. Pre počet opakovaní 10 dostaneme protokol RP_{10}.

Algoritmus 18 RP_{10}

1: R_1
2: náhodne vyberie 10 prvočísel $p_1, \ldots p_{10}$ v intervale $0..n^2$
3: nech $num(X)$ označuje číslo s binárnym zápisom X;
4: vypočíta 10 čísel $RX_i \leftarrow num(X) \bmod p_i,\ 1 \leq i \leq 10$
5: pošle $RX_1, \ldots, RX_{10}, p_1, \ldots, p_{10}$ druhému počítaču
6: R_2
7: po prijatí $RX_1, \ldots, RX_{10}, p_1, \ldots, p_{10}$ druhý počítač vypočíta
8: $RY_i \leftarrow num(X) \bmod p_i,\ 1 \leq i \leq 10$
9: **if** $\forall i,\ RX_i = RY_i$ **then** return "$x = y$"
10: **else** return "$x \neq y$"

Komunikačná zložitnosť narástla desaťnásobne. Čo vieme povedať o pravdepodobnosti chyby? Nesprávnu odpoveď dáva algoritmus RP_{10} iba v prípade, ak všetkých 10 porovnaní $RX_i \stackrel{?}{=} RY_i$ dopadne pozitívne, hoci $X \neq Y$. Keďže 10 prvočísel sme vyberali *nezávisle*, pre pravdepodobnosť chyby platí

$$\left(\frac{n-1}{Prim(n^2)}\right)^{10} \leq \left(\frac{\ln n^2}{n}\right)^{10} = \frac{2^{10} \cdot (\ln n)^{10}}{n^{10}}$$

Pre $n = 10^{16}$ je pravdepodobnosť nesprávnej odpovede nanajvýš $0.4717 \cdot 10^{-141}$.

Cvičenie 3.1 *Napíšte program, ktorý pre vstupnú hodnotu dĺžky databáz n a hodnotu chyby ϵ určí*
(a.) počet opakovaní k tak, aby pravdepodobnosť chyby pri použití algoritmu RP_k bola nanajvýš ϵ

(b.) hodnotu m tak, aby pri použití základného algoritmu RP, v ktorom $PRIM(n^2)$ nahradíme $PRIM(m)$, bola pravdepodobnosť chyby nanajvýš ϵ

3.1.2 Existuje také j, že $x_j = y_j$?

Tentokrát si naše vzdialené počítače udržiavajú postupnosť, povedzme 10, reťazcov

$$\begin{array}{lll} \mathsf{RI} & x_1, \ldots, x_{10} & x_i \in \{0,1\}^n \\ \mathsf{RII} & y_1, \ldots, y_{10} & y_i \in \{0,1\}^n \end{array}$$

Zaujíma nás, či existuje taký index j, aby $x_j = y_j$. Opäť sa dá dokázať, že deterministický protokol vyžaduje prekomunikovanie informácie veľkosti $10n$. Pritom pravdepodobnostnému algoritmu, opäť využívajúcemu zvyšky po delení prvočíslom, stačí prekomunikovať menej.

Namiesto klamania dovolíme algoritmu, aby v situácii, keď si svojou odpoveďou nie je istý, povedal "neviem". Vyžadujeme však, aby to nerobil príliš často. Takémuto typu algoritmov hovoríme Las Vegas.

Algoritmus 19 — Existuje j, $x_j = y_j$?

RI:

1: náhodne zvoľ 10 prvočísel $p_1, \ldots, p_{10}$ v intervale $0..n^2$
2: $s_i \leftarrow x_i \bmod p_i$
3: pošli $p_1, \ldots, p_{10}, s_1, \ldots, s_{10}$ počítaču RII

RII:

1: $s'_i \leftarrow y_i \bmod p_i$
2: **if** $s_i \neq s'_i$ pre všetky i **then** return "nie"
3: **else** nech j je minimálne také, že $s_j = s'_j$
4: pošli počítaču RI j, y_j

RI:

1: **if** $x_j = y_j$ **then** odpoveď je "áno"
2: **else** odpoveď je "neviem"

Ľahko vidno, že počítače prekomunikovali $20(2\lceil \log n \rceil) + \log 10 + n$ bitov.

analýza chyby

Analýzu zhyby algoritmu rozdelíme na dva prípady podľa toho, či hľadaný index j existuje alebo nie.

$\forall \mathbf{i}\ \mathbf{x_i} \neq \mathbf{y_i}$

Začnime prípadom, keď korektná odpoveď algoritmu má byť "nie". Už vieme, že napriek tomu, že čísla X, Y dĺžky n sú rôzne, s pravdepodobnosťou $\frac{\ln n^2}{n} = \frac{2 \ln n}{n}$ sa môže stať, že pre náhodne zvolené prvočíslo $p \leq n^2$ sa ich zvyšky po delení p rovnajú: $X \mod p \equiv Y \mod p$. My volíme náhodne 10 prvočísel, preto s pravdepodobnosťou $\left(1 - \frac{2 \ln n}{n}\right)^{10}$ sa to nestane pre žiadne z nich; vtedy RII bez ďalšej komunikácie s RI korektne odpovie "nie". Pre pravdepodobnosť Pr korektnej

odpovede (v prípade $x_i \neq y_i\ \forall i$) preto platí[2]

$$\begin{aligned} Pr \quad &\geq \left(1-\tfrac{2\ln n}{n}\right)^{10} = \textstyle\sum_{i=0}^{10}(-1)^i\binom{10}{i}\left(\tfrac{2\ln n}{n}\right)^i \\ &= 1+\textstyle\sum_{i=1}^{5}\binom{10}{2i}\left(\tfrac{2\ln n}{n}\right)^{2i} - \sum_{i=0}^{4}\binom{10}{2i+1}\left(\tfrac{2\ln n}{n}\right)^{2i+1} \\ &\geq 1-\tbinom{10}{1}\tfrac{2\ln n}{n}+ \\ &\underbrace{\binom{10}{10}\left(\frac{2\ln n}{n}\right)^{10}+\sum_{i=1}^{4}\left[\binom{10}{2i}\left(\frac{2\ln n}{n}\right)^{2i}-\binom{10}{2i+1}\left(\frac{2\ln n}{n}\right)^{2i+1}\right]}_{\geq 0} \\ &\geq 1-\tfrac{20\ln n}{n} \quad \geq \quad 1/2 \end{aligned}$$

Ak existuje nejaké i $x_i = y_i$, je množina indexov, na ktorých sa X, Y zhodujú, neprázdna. Nech j je najmenší z týchto indexov: $x_j = y_j$. Označme E_j udalosť, keď j je najmenšie také, že $x_j \mod p_j = y_j \mod p_j$; inými slovami, RII pošle RI index j a reťazec y_j.

$\exists \mathbf{i}\ \mathbf{x_i} = \mathbf{y_i}$

- ak $j = 1$, RI úspešne overí, že $x_1 = y_1$ a korektne odpovie
- ak $j > 1$, je nenulová pravdepodobnosť, že $x_j \neq y_j$. Pravdepodobnosť korektnej odpovede je rovná pravdepodobnosti udalosti E_j, čo je pravdepodobnosť toho, že pre $\forall i < j$ je $x_i \mod p_i \neq y_i \mod p_i$

$$\left(1-\frac{2\ln n}{n}\right)^{j-1} \geq 1-\frac{2(j-1)\ln n}{n} \geq 1-\frac{18\ln n}{n} \geq 1/2, \text{ pre } n \geq 189$$

Nezávisle od toho, či hľadaný index existuje alebo nie, dá algoritmus s pravdepodobnosťou aspoň $1/2$ korektnú odpoveď, v ostatných prípadoch povie "neviem".

3.1.3 $AB \stackrel{?}{=} C$

Uvažujme tri štvorcové matice A, B, C typu $n \times n$. Zaujíma nás, či platí rovnosť

$$AB \stackrel{?}{=} C$$

Deterministický algoritmus založený na Strassenovom násobení matíc je zložitosti $O(n^{\log_2 7})$. Ukážeme, že pravdepodobnostný algoritmus môže byť efektívnejší. Založený je na uvedomení si jednoduchého faktu: ak $AB = C$ tak pre ľubovoľný vektor x platí $ABx = Cx$. Alebo aj: ak existuje vektor x, pre ktorý $ABx \neq Cx$, tak $AB \neq C$.

Algoritmus 20 — Test AB=C

1: náhodne vyber $x \in \{0,1\}^n$
2: **if** $A(Bx) \neq Cx$ **then** return "určite $AB \neq C$"
3: **else** return "asi $AB = C$"

Časová zložitosť – vďaka asociativite násobenia (pri existencii dobrého generátora náhodných čísel) sme zložitosť znížili na $O(n^2)$.

Chyba – chyby sa dopustíme v tom prípade, ak $AB \neq C$ a pritom pre náhodne zvolený vektor x platí $ABx = Cx$. Odhadnime pravdepodobnosť toho, že sa tak stane.

[2] Podľa binomickej vety

Lema 3.2 *Nech $AB \neq C$, $x \in \{0,1\}^n$. Potom $Pr[ABx = Cx] \leq 1/2$*

Dôkaz: Ak $AB \neq C$, potom $AB - C \neq 0$. Existujú teda indexy i, j tak, že $(AB - C)[i, j] \neq 0$. Nech $(a_1, \ldots, a_n)$ označuje $i-$ty riadok matice $AB - C$. Potom

$$\begin{array}{rcl} Pr[(AB-C)x = 0] & \leq & Pr\left[\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0\right] \\ & = & Pr[x_j = \frac{-1}{a_j} \sum_{k \neq j} a_k x_k] \quad = \quad 1/2 \end{array}$$

Využili sme, že $a_j \neq 0$ a $Pr[x_i = 0] = Pr[x_i = 1] = 1/2$

Ak algoritmus skončí s odpoveďou "asi", môžme ho zopakovať. Pri $k-$násobnom zopakovaní sa časová zložitosť zvýši o multiplikatívnych k. Pritom $k-$ násobné zopakovanie algoritmu — $k-$násobné získanie odpovede "asi" — znamená chybu nanajvýš $1/2^k$.

□

Uvedený algoritmus je rýchly, jedným smerom — $AB \neq C$ — hovorí korektne, chyby sa môže dopustiť len pri odpovedi "asi $AB = C$". Takýto typ algoritmu sa volá Monte Carlo.

3.2 Klasifikácia náhodou riadených algoritmov

umiestnenie pravdepodobnosti

Pri klasifikácii pravdepodobnostných algoritmov si všímame dva aspekty. Jeden z možných pohľadov na klasifikáciu pravdepodobnostných algoritmov je ten, keď si všímame **umiestnenie pravdepodobnosti** v nich.

I. modelom pravdepodobnostného algoritmu je pravdepodobnostné rozdelenie nad množinou deterministických stratégií

II. pravdepodobnostný algoritmus modelujeme nedeterministickým algoritmom s pravdepodobnostným rozdelením nad nedeterministickými voľbami

typ chyby

Druhým aspektom je chyba algoritmu. Pri uvažovaní o **type a veľkosti chyby** sa vlastne snažíme charakterizovať praktickosť algoritmov. Rozlišujeme 2 základné modely chýb

Monte Carlo algoritmy dajú odpoveď vždy, s rozumnou pravdepodobnosťou však nemusí byť korektná

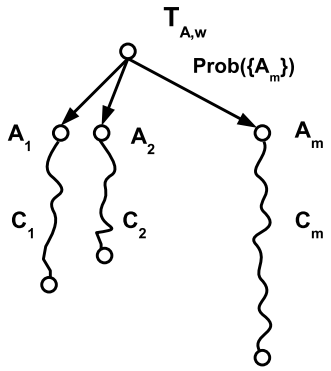
Las Vegas algoritmy sú také, keď každá odpoveď je správna, pripúšťame však alebo odpoveď "neviem" v rozumnom čase, alebo potenciálne nekonečné výpočty.

Zaujímavé tiež je, akým počtom opakovaní vieme—a či vôbec—dosiahnuť požadovanú spoľahlivosť.

3.2.1 Umiestnenie pravdepodobnosti — I. model

Pravdepodobnostný algoritmus vnímame ako pravdepodobnostné rozdelenie $Prob$ nad konečnou množinou deterministických stratégií $A_1, \ldots, A_m$.

- pre vstup w náhodne zvolíme i a realizujeme výpočet $C_i = A_i(w)$, ktorého časová zložitosť je $Time(C_i)$. Náhodný výber i odpovedá pravdepodobnostnému rozdeleniu $Prob$
- hýbeme sa v pravdepodobnostnom priestore $(S_{A,w}, Prob)$, kde $S_{A,w} = \{A_1, \ldots, A_m\}$



Čas je náhodná premenná Z, ktorá jednotlivým behom/výpočtom priraďuje dĺžku ich trvania. Pri skúmaní efektívnosti/časovej zložitosti si preto všímame hodnoty tejto premennej.

$\mathbf{Z}: \quad S_{A,w} \to N \qquad Z(C_i) = Time(C_i)$

Na jednom vstupe existuje viacero výpočtov, ktoré sa môžu líšiť dĺžkou trvania. Ako potom hovoríme o zložitosti algoritmu na konkrétnom vstupe? Pribúda pojem *očakávanej zložitosti/očakávaného času* $ExpTime_A(w)$, ktorý je váženým priemerom/strenou hodnotou potenciálnych behov:

očakávaný prípad

$$\mathbf{ExpTime_A(w)} = \sum_{i=1}^{m} Prob[C_i] \cdot Z(C_i) = \sum_{i=1}^{m} Prob[C_i] \cdot Time(C_i)$$

$$\mathbf{ExpTime_A(n)} = \max_{|w|=n}\{ExpTime_A(w)\}$$

$$\mathbf{Time_A(n)} = \max_{i,|w|=n}\{Time(A_i(w))\}$$

Pri skúmaní pravdepodobnosti korektnej odpovede si pomáhame indikačnou premennou X, ktorej hodnota závisí od správnosti príslušného výpočtu.

korektnosť

$$\mathbf{X(C_i)} = \begin{cases} 1, & \text{ak výpočet } C_i \text{ dáva korektnú odpoveď;} \\ 0, & \text{inak} \end{cases}$$

Pravdepodobnosť korektnej odpovede je potom strednou hodnotou indikačnej premennej X:

$$\begin{aligned} \mathbf{E[X]} &= \sum_{i=1}^{m} X(C_i) \cdot Prob[C_i] \\ &= \sum_{X(C_i)=1} 1 \cdot Prob[C_i] + \sum_{X(C_i)=0} 0 \cdot Prob[C_i] \\ &= Prob[X = 1] = Prob[\text{A počíta korektný výstup}] \end{aligned}$$

Pravdepodobnosť chyby

$$Error_A(w) = 1 - E[X]$$

$$Error_A(n) = \max_{|w|=n}\{Error_A(w)\}$$

Príklad 3.1 *Analyzujme z tohto pohľadu algoritmus na porovnanie "databáz"*

- *pravdepodobnostný priestor je tvorený množinou behov, pričom jednotlivé behy sú určené voľbou prvočísla* $S_{R,(x,y)} = \{C_p \mid p \in Prim(n^2)\}$

- *uvažujeme rovnomerné rozdelenie, preto* $Prob[C_p] = \frac{1}{Prim(n^2)}$
- *pri analýze chyby si pomôžeme indikačnou premennou* $X(C_p)$*; keďže v prípade* $X = Y$ *k žiadnej chybe nedochádza, význam indikačnejpremennej sa prejaví v prípade* $X \neq Y$*, kedy* $X(C_p) = \begin{cases} 1, & p \text{ je "dobré"} \\ 0, & p \text{ je "zlé"} \end{cases}$
- $E[X] = \sum_{p \in Prim(n^2)} X(C_p) \cdot Prob[C_p]$
  $= \sum_{p \in Prim(n^2)} X(C_p) \cdot \frac{1}{Prim()n^2} = \frac{1}{Prim(n^2)} \sum_{p \text{ je dobre}} X(C_p)$
  $\geq \frac{1}{Prim(n^2)}(Prim(n^2) - (n-1)) = 1 - \frac{n-1}{Prim(n^2)}$
- $Error_R((x,y)) = 1 - E[X] \leq \frac{n-1}{Prim(n^2)} \leq \frac{2 \ln n}{n}$

Príklad 3.2 (Max-Sat) *Pre vstupnú formulu* $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ *v KNF chceme vypočítať také priradenie vstupnch hodnôt* $\alpha \in \{0,1\}^n$*, ktoré spĺňa maximálny počet klauzúl.*

Ukážeme, že náhodný vektor α *spĺňa s veľkou pravdepodobnosťou "dosť" klauzúl. Preto nasledujúci algoritmus RSAM má zmysel.*

Algoritmus 21 RSAM

vstup: $\Phi = F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_m,\ F_i = (l_{i,1} \vee l_{i,2} \vee \ldots \vee l_{i,k})$

1: náhodne $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n$ ▷ $Pr(\alpha_j = 1) = Pr(\alpha_j = 0) = 1/2$

2: return(α)

Pre vstup α *priradíme každej elementárnej disjunkcii* F_i *indikačnú premenné* $Z_i(\alpha)$*, a celej formule priradíme premennú* $Z(\alpha)$*, ktorá počíta počet splnených klauzúl; keď je* α *zrejmé z kontextu, budeme niekedy písať len* Z_i, Z*. Zaujíma nás kvalita, resp. hodnota* $E[Z]$*.*

$$Z_i(\alpha) = \begin{cases} 1, & F_i(\alpha) = 1 \\ 0, & F_i(\alpha) = 0 \end{cases} \qquad Z = \sum_{i=1}^{m} Z_i$$

$$E[Z] = E\left[\sum_{i=1}^{m} Z_i\right] = \sum_{i=1}^{m} E[Z_i]$$

Pre výpočet $E[Z]$ *potrebujeme odhad na* $E[Z_i]$*.*

- $F_i(\alpha) = 0 \iff \forall j\ l_{i,j} = 0$

  $Pr[F_i(\alpha) = 0] = \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2^k}$*, kde* k *je počet literálov v* $F_i(\alpha)$
- $E[Z_i]$ *je vlastne pravdepodobnosť toho, že sa elementárna disjunkcia* $F_i(\alpha)$ *vyhodnotí na 1:* $E[Z_i] = 1 - \frac{1}{2^k}$*. Navyše, každá* F_i *má aspoň jeden literál,* $k \geq 1$*, preto* $E[Z_i] \geq 1/2$
- $E[Z] = \sum_{i=1}^{m} E[Z_i] \geq \sum_{i=1}^{m} 1/2 = \frac{m}{2}$

Keďže vieme, že očakávaný počet klauzúl, ktoré náhodný vektor spĺňa, je aspoň $m/2$, môžme to využiť na jednoduché hľadanie vektora, ktorý spĺňa aspoň $m/2$ klauzúl.

Algoritmus 22 modif-RSAM

1: náhodne $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n$
2: $r \leftarrow |\{i \mid F_i(\alpha) = 1\}|$
3: **if** $r \geq m/2$ **then** return(α)
4: **else** goto 1

Algoritmus 23 RQS(A)

vstup: $A = \{a_1, \ldots, a_n \mid a_i \in (S, <)\}$
1: **if** $A = \{a\}$ **then** return a
2: **else** $b \leftarrow random(A)$
3: $A_< = \{a \in A \mid a < b\}$
4: $A_> = \{a \in A \mid a > b\}$
5: return $RQS(A_<), b, RQS(A_>)$

3.2.2 Umiestnenie pravdepodobnosti — II. model

Pri tomto type priradíme pravdepodobnosť jednotlivým nedeterministickým voľbám. Príkladom je pravdepodobnostný Quicksort RQS:
Čas algoritmu meriame počtom porovnaní, jednotlivé prípady závisia od voľby pivota b v jednotlivých volaniach

- vždy extrém, potom $O(n^2)$
- vždy medián, potom $O(n \log n)$
- riešenie $T(n) \leq T(n/8) + T(7n/8) + n - 1$ je tiež $O(n \log n)$; takéto rozdelenie je dosť pravdepodobné

Nech výstupom je $s_1 < s_2 < \ldots < s_n$. Pre $i < j$ označme

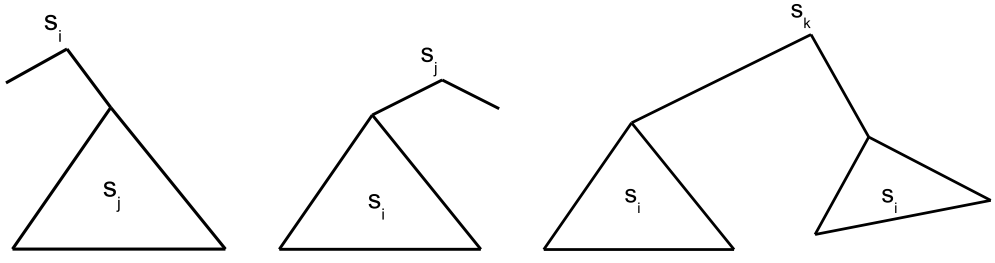
$$X_{i,j}(C) = \begin{cases} 1, & s_i \text{ sa v priebehu C porovnávalo s } s_j \\ 0, & s_i, s_j \text{ sa v priebehu C neporovnávajú} \end{cases}$$

Čas konkréteho výpočtu je počet realizovaných porovnaní: $T(C) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} X_{i,j}(C)$
$E[T] = E\left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} X_{i,j}\right] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} E[X_{i,j}]$

Nech $p_{i,j}$ označuje pravdepodobnosť, že sa s_i, s_j porovnávajú; zrejme $E[X_{i,j}] = p_{i,j}$. $E[X_{i,j}]$
Dva prvky sa porovnávajú len vtedy, ak je jeden nich pivotom pri delení množiny, v ktorej sa nachádza aj ten druhý prvok.

$$\underbrace{s_1 \quad \ldots \quad s_{i-1}}_{L}\, s_i \underbrace{\quad \ldots \quad}_{M} s_j \underbrace{s_{j+1} \quad \ldots \quad s_n}_{R}$$

s_i sa porovnáva s s_j v takých výpočtoch, keď jeden z x_i, x_j je ako pivot zvolený skôr, ako ktorýkoľvek z prvkov v M



$$p_{i,j} = \frac{|\{s_i, s_j\}|}{|\mathsf{M} \cup \{s_i, s_j\}|} = \frac{2}{j-i-1+2} = \frac{2}{j-i+1}$$

$$\begin{aligned} E[T] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} p_{i,j} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \tfrac{2}{j-i+1} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n-i+1} \tfrac{2}{k} \\ &\leq 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n-i+1} \tfrac{1}{k} \\ &= 2 \sum_{i=1}^{n} H(n) = \mathbf{O(n \ln n)} \end{aligned}$$

$$H(n) = \underbrace{\frac{1}{1}}_{\leq 1} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{<1} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{<1} + \cdots + \tfrac{1}{n} \qquad \ln n \text{ skupín so súčtom} \leq 1$$

3.2.3 Las Vegas

V súvislosti s Las Vegas algoritmami sa možno stretnúť s dvomi definíciami-jedna pripúšťa nekonečné výpočty, druhá zas odpoveď "neviem". Označme $A(x)$ odpoveď algoritmu A a $F(x)$ korektnú odpoveď na vstupe w.

D1

Definícia 3.1 *Pravdepodobnostný algoritmus A je typu Las Vegas (LV) keď*

$$Pr[A(x) = F(x)] = 1$$

Každá odpoveď je korektná, kedy ju dostaneme, nevieme. Zaujímavá je preto očakávaná zložitosť ExpTime.

D2

Definícia 3.2 *Pravdepodobnostný algoritmus A je typu Las Vegas (LV) keď* $\forall x$

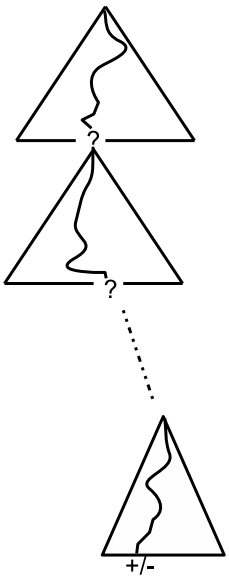
- $Pr[A(x) = F(x)] \geq 1/2$
- $Pr[A(x) = \text{"?"}] = 1 - Pr[A(x) = F(x)] \leq 1/2$

Konštanta 1/2 nie je podstatná, vyhovuje ľubovoľné $O < \varepsilon < 1$. Zamyslime sa, aký je vzťah medzi týmito dvomi definíciami. Ukážeme, že sú ekvivalentné.

Lema 3.3 *Ku každému LV algoritmu $A_?$ v zmysle definície 3.2 existuje ekvivalentný algoritmus A, ktorý je LV v zmysle definície 3.1. Navyše, čas narastie len o multiplikatívnu konštantu: $ExpTime_A(n) = O(ExpTime_{A_?}(n))$*

Dôkaz: Samotná konštrukcia ekvivalentného algoritmu A je priamočiara—budeme opakovať výpočet algoritmu $A_?$ dovtedy, kým nedostaneme korektnú odpoveď.

pravdepodobnosť korektnej odpovede
Čo vieme povedať o pravdepodobnosti získania korektnej odpovede A, resp. dosiahnutia odpovede "?" algoritmu $A_?$? Nech p je pravdepodobnosť korektnej odpovede algoritmu $A_?$, $p \geq 1/2$. Potom pravdepodobnosť toho, že po k opakovaniach behu algoritmu $A_?$ ešte stále nemáme korektnú odpoveď, je nanajvýš $1/2^k$. Preto $Prob[A(x) = F(x)] = 1$



čas
Je zrejmé, že A môže realizovať nekonečné výpočty. Ukážeme, že v očakávanom prípade je situácia oveľa lepšia. Uspokojíme sa s horným odhadom na očakávaný prípad, preto budeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že každý výpočet algoritmu $A_?$, ktorý končí odpoveďou ?, dosahuje zložitosť najhoršieho prípadu.

Všimnime si výpočty, ktoré *skončia* v i-tom kole.

- Nech $Set_i = \{C \in S_{A,w} \mid (i-1)Time_{A_?} < Time_A(C) \leq iTime_{A_?}(w)\}$
  Zrejme $S_{A,w} = \cup S_{i=0}^{\infty} Set_i,\ \forall i \neq j\ Set_i \cap Set_j = \emptyset$
- Aby výpočet C mohol skončiť v i-tom kole, musí $(i-1)$ kôl skončiť odpoveďou "?". Pravdepodobnosť odpovede "?" je nanajvýš $1/2$, preto pravdepodobnosť, že výpočet neskončí po $i-1$ kolách je nanajvýš $\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$. Z toho dostávame

$$\sum_{C \in Set_i} Prob[C] \leq \frac{1}{2^{i-1}}$$

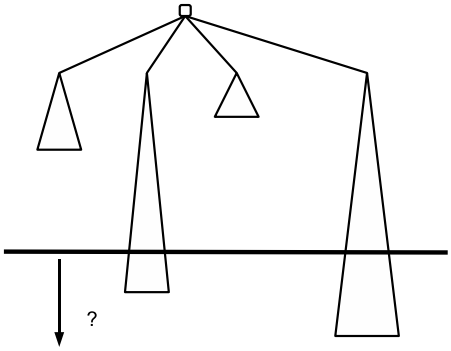
$$\begin{aligned}
ExpTime_A(w) &= \sum_{C \in S_{A,w}} Time_A(C) \cdot Prob[C] \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{C \in Set_i} Time_A(C) \cdot Prob[C] \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{C \in Set_i} iTime_{A_?(w)} \cdot Prob[C] \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} iTime_{A_?}(w) \cdot \sum_{C \in Set_i} Prob[C] \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} iTime_{A_?}(w) \cdot \frac{1}{2^{i-1}} \\
&= Time_{A_?}(w) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^{i-1}} \\
&= Time_{A_?}(w) \cdot 2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i} = 4 \cdot Time_{A_?}(w)
\end{aligned}$$

□

Lema 3.4 *Ku každému LV algoritmu A v zmysle definície 3.1 existuje ekvivalentný algoritmus $A_?$, ktorý je LV v zmysle definície 3.2.*

Dôkaz:

Ak do korektného algoritmu ideme vniesť nejednoznačnosť/odpoveď neviem, tak je prirodzené vyžadovať, aby ten nový algoritmus bol aspoň rýchly. Takto budeme konštruovať požadovaný algoritmus $A_?$. Zvolíme rozumnú hranicu a všetky výpočty, ktoré dovtedy neskončili, "ustrihneme" s odpoveďou "?".



Pri voľbe hranice pre odpoveď "?" treba mať na pamäti, že podľa definície sa pod touto hranicou môže ocitnúť nanajvýš polovica všetkých výpočtov. Keďže *najviac polovica čísel má hodnotu väčšiu ako dvojnásobok priemeru*, bude rozumným ohraničením

$$T = 2ExpTime_A(w)$$

Kvôli sporu predpokladajme, že $Prob[A_?(w) = \text{"?"}] > 1/2$. Označme

- $S_{A,w}(?)$ množinu výpočtov s odpoveďou "?"
  $S_{A,w}(?) = \{C \in S_{A,w} \mid Time(C) > 2ExpTime_A(w)\}$
- $S_{A,w}(F(w))$ množinu výpočtov s korektnou odpoveďou $F(w)$
  $S_{A,w}(F(w)) = S_{A,w} - S_{A,w}(?)$

Platí:

- $Prob[A_?(w) = \text{"?"}] = \sum_{C \in S_{A,w}(?)} Prob[C] > \frac{1}{2}$
- Všetky výpočty z $S_{A,w}(?)$ sú dlhé: $Time(C) \geq 2ExpTime_A(w) + 1$.

Preto

$$\begin{aligned}
\mathbf{ExpTime_A(w)} &= \sum_{C \in S_{A,w}} \overbrace{Time_A(C)Prob[C]}^{*} \\
&= \sum_{C \in S_{A,w}(?)} * + \sum_{C \in S_{A,w}(F(w))} * \\
&\geq \sum_{C \in S_{A,w}(?)} (2ExpTime_A(w) + 1) \cdot Prob[C] + 0 \\
&= (2ExpTime_A(w) + 1) \underbrace{\sum_{C \in S_{A,w}(?)} Prob[C]}_{>1/2} \\
&> \frac{(2ExpTime_A(w) + 1)}{2} = \mathbf{ExpTime_A(w) + 1/2}
\end{aligned}$$

□

trieda LV^*

Trieda LV algoritmov, pre ktoré $Prob[A(x) = F(x)] = 1$, sa niekedy označuje Las Vegas*, resp. LV^*; hviezdička zrejme naznačuje možnosť nekonečných výpočtov.

3.2.4 Monte Carlo s jednosmernou chybou

O tejto triede algoritmov[3] hovoríme v súvislosti s rozhodovacími problémami[4]. Neformálne ide o také algoritmy, ktoré majú povolené sa mýliť/klamať len jedným smerom.

Definícia 3.3 *Pravdepodobnostný algoritmus A pre rozhodovací problém* (Σ, L) *je* Monte Carlo s jednosmernou chybou/jednosmerný Monte Carlo*(1MC, one-sided MC), ak* *1MC*

(a) $\forall x \in L \quad Prob[A(x) = 1] \geq 1/2$
(b) $\forall x \notin L \quad Prob[A(x) = 0] = 1$

Keď podmienku (a) *nahradíme podmienkou* *1MC**

(a*) $\forall x \in L \quad Prob[A(x) = 1] \to 1$ *s rastúcou dĺžkou* $|x|$

dostaneme tzv. 1MC algoritmy*

Príkladom 1MC pravdepodobnostného algoritmu je algoritmus 17 na porovnanie databáz, resp. algoritmus 20 na pravdepodobnostné porovnanie matíc $?AB = C?$.

Ako sme videli, pravdepodobnosť chyby klesá exponenciálne s počtom *nezávislých* opakovaní. Ak je teda 1MC algoritmus efektívny, ľahko z neho získame algoritmus rádovo rovnakej zložitosti s exponenciálne menšou chybou. *znižovanie chyby*

- nech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \{0,1\}^k$ je k výsledkov nezávislých behov 1MC algoritmu A
- ak $\exists k : \alpha_k = 1$, môžme so 100% istotou akceptovať
- ak $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$, tak pre $x \in L$ je $Prob[A(x) = 0] \leq 1/2$ a teda $(Prob[A(x) = 0])^k \leq 2^{-k}$.

3.2.5 Monte Carlo s ohraničenou chybou

V prípade takého problému, ktorý nie je rozhodovací, ale je to problém počítania funkcie $F(x)$, pod korektnou odpoveďou prirodzene rozumieme, že algoritmus vypočítal presne hodnotu $F(x)$; nekorektnou odpoveďou je nepresný výsledok. Pri Monte Carlo algoritoch s ohraničenou chybou[5] pripustíme, aby algoritmus dával nesprávnu odpoveď, budeme ale vyžadovať, aby bol "dostatočný" rozdiel medzi odpoveďou korektnou a nekorektnou. Formálne:

Definícia 3.4 *Pravdepodobnostný algoritmus A je Monte Carlo s ohraničenou chybou(2MC, bounded-error MC), ak* *2MC*

$$\exists 0 < \varepsilon \leq 1/2 \quad \forall x \quad Prob[A(x) = F(x)] \geq 1/2 + \varepsilon$$

V prípade 1MC algoritmov sme pravdepodobnosť chyby jednoducho znížili nezávislým opakovaním algoritmu. Ako nám pomôže nezávislé opakované spúšťanie 2MC algoritmu? *znižovanie chyby*

Uvažujme t nezávislých opakovaní 2MC algoritmu A a odpovedzme len vtedy, ak sa na odpovedi zhodne aspoň $t/2$ behov (algoritmus 24). Zaujíma nás, aká je pravdepodobnosť toho, že *nedostaneme* korektnú odpoveď.
Keďže A je 2MC, existuje $0 < \varepsilon \leq 1/2$ $Prob[A(x) = F(x)] \geq 1/2 + \varepsilon$. Nech x je vstup. Označme

- $p = p(x) = Prob[A(x) = F(x)] = 1/2 + \varepsilon_x$, $\varepsilon_{\mathbf{x}} \geq \varepsilon$

[3] One-sided Monte Carlo
[4] Rozhodovací problém je dvojica (Σ, L), pričom sa pre $x \in \Sigma^*$ pýtame, či $?x \in L?$
[5] Bounded-Error Monte Carlo

Algoritmus 24 A_t

1: nech $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ je výsledok t nezávislých behov 2MC algoritmu A
2: ak existuje taký výsledok α, ktorý sa vyskytol aspoň $t/2$ krát, výsledkom je "α", inak je výsledkom "?"

- $pr_i(x)$ pravdepodobnosť toho, že spomedzi k opakovaní $\mathsf{A}(x)$ je presne i odpovedí korektných; je presne $\binom{k}{i}$ možností takýchto výpočtov

Chybu algoritmu 24 získame odhadom $pr_i(x)$.

$$\begin{aligned}
pr_i(x) &= \tbinom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} = \tbinom{k}{i} [p(1-p)]^i (1-p)^{k-2i} \\
&= \tbinom{k}{i} \left[\left(\tfrac{1}{2}+\varepsilon_x\right)\left(\tfrac{1}{2}-\varepsilon_x\right)\right]^i \left(\tfrac{1}{2}-\varepsilon_x\right)^{k-2i} \\
&= \tbinom{k}{i} \left(\tfrac{1}{4}-\varepsilon_x^2\right)^i \left[\left(\tfrac{1}{2}-\varepsilon_x\right)^2\right]^{k/2-i} \\
&< \tbinom{k}{i} \left(\tfrac{1}{4}-\varepsilon_x^2\right)^i \left[\left(\tfrac{1}{2}+\varepsilon_x\right)\left(\tfrac{1}{2}-\varepsilon_x\right)\right]^{k/2-i} \\
&= \tbinom{k}{i} \left(\tfrac{1}{4}-\varepsilon_x^2\right)^i \left(\tfrac{1}{4}-\varepsilon_x^2\right)^{k/2-i} = \tbinom{k}{i} \left(\tfrac{1}{4}-\varepsilon_x^2\right)^{k/2} \\
&\leq \tbinom{k}{i} \left(\tfrac{1}{4}-\varepsilon^2\right)^{k/2}
\end{aligned}$$

A_k odpovie korektne, ak aspoň $\lceil k/2 \rceil$ jednotlivých behov odpovie korektne.

$$\begin{aligned}
Prob[A_k(x) = F(x)] &= \sum_{i=\lceil k/2 \rceil}^{k} pr_i(x) = 1 - \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} pr_i(x) \\
&> 1 - \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k}{i} \left(\frac{1}{4}-\varepsilon_x^2\right)^{k/2} \\
&= 1 - \left(\frac{1}{4}-\varepsilon_x^2\right)^{k/2} \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k}{i} \\
&> 1 - \left(\frac{1}{4}-\varepsilon_x^2\right)^{k/2} \cdot 2^k \\
&\geq 1 - (1-4\varepsilon_x^2)^{k/2} \geq 1 - (1-4\varepsilon^2)^{k/2} \qquad [**]
\end{aligned}$$

Ak chceme, aby $Prob[A_k(x) = F(x)] \geq 1 - \delta$, stačí zvoliť

$$k = \frac{2 \ln \delta}{\ln(1-4\varepsilon^2)}$$

Uvedomme si, že keďže ε aj δ sú konštanty, je konštantou aj k. Preto za zníženie pravdepodobnosti chyby na δ "platíme" len konštantným nárastom zložitosti

$$T_{A_k}(n) = O(kT_A(n)) = O(T_A(n))$$

□

3.2.6 Monte Carlo s neohraničenou chybou

Konštanta ε v 2MC algoritmoch vytvárala akúsi "bariéru", ktorá umožňovala efektívne odlíšiť, s veľkou pravdepodobnosťou, korektné odpovede od nekorektných. Ak upustíme od tejto požiadavky, dostaneme triedu MC, pri ktorej to so znižovaním pravdepodobnosti chyby nebude také optimistické.

MC

Definícia 3.5 *Pravdepodobnostný algoritmus A je typu Monte Carlo s neohraničenou chybou (MC, unbounded-error MC), ak*

$$Prob[A(x) = F(x)] > 1/2$$

Príklad 3.3 *Predstavme si, že máme taký pravdepodobnostný algoritmus A, ktorý má pre vstupné slovo x až $2^{|x|}$ možných behov, pričom korektných je $2^{|x|-1}+1$, teda "tesná väčšina". Takýto algoritmus je zrejme MC*

$$Prob[A(x) = F(x)] = \frac{2^{|x|-1}+1}{2^{|x|}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{|x|}} > \frac{1}{2}$$

Pritom hodnota $\frac{1}{2^{|x|}}$ *tu hrá úlohu* ε_x *z 2MC algoritmov.*

Zaujíma nás, koľko opakovaní tohto algoritmu potrebujeme, aby sme pri hlasovaní nadpolovičnou väčšinou dosiahli pravdepodobnosť chyby nanajvýš δ. *znižovanie chyby*
Využijeme, čo už vieme–ak chceme $Prob[A_k(x) = F(x)] \geq 1-(1-4\varepsilon^2)^{k/2} > 1-\delta$, *stačí zvoliť*

$$\begin{aligned} k = k(x) &\geq \frac{2\ln\delta}{\ln(1-4\varepsilon_x^2)} = \frac{2\ln\delta}{\ln\left(1-4\cdot 2^{-2|x|}\right)} \\ &\geq \frac{2\ln\delta}{-2^{-2|x|}} \qquad //0<y<1 \quad \Rightarrow \quad \ln(1-y) \leq -y \\ &= (-2\ln\delta)2^{2|x|} \end{aligned}$$

To ale znamená, že $\boxed{Time_{A_k}(x) = (-2\ln\delta)2^{2|x|} \cdot Time_A(x)}$

Uvedený príklad je z akéhosi pohľadu "worst-case". Ak by sme mali $\varepsilon_x = \frac{1}{\log|x|}$, nebolo by to s časom $Time_{A_k}(x)$ také zlé.

Na záver tejto časti ešte jeden konkrétny príklad MC algoritmu.

Príklad 3.4 *Uvažujme opäť porovnávanie databáz. Tentokrát budeme vstup akceptovať vtedy, ak sú databázy rôzne. Náhodný výber využijeme na "uhádnutie" miesta, kde sa databázy líšia. Výsledkom je Algoritmus UMC.*

Algoritmus 25 UMC

vstup: RI: $X = x_1 \ldots x_n$
RII: $Y = y_1 \ldots y_n$

výstup: 1 ak $X \neq Y$

RI
1: náhodne zvoľ $j \in \{1, \ldots, n\}$
2: pošli j, x_j do RII

RII
1: **if** $x_j \neq y_j$ **then** "accept" ▷ 100% istota
2: **else**
3: "accept" s pravdepodobnosťou $1/2 - \frac{1}{2n}$
4: "reject" s pravdepodobnosťou $1/2 + \frac{1}{2n}$

Celá komunikácia spočíva v prenesení j, x_j, preto prenášame $\lceil \log(n+1) \rceil + 1$ bitov. *počet bitov*

Analýzu chyby rozdelíme na dve časti podľa korektnej odpovede. Najprv označenia. *UMC je MC*

Označme $C_{j,l}$ takú udalosť, že RI zvolilo (v prvej fáze) index j a RII v druhej fáze povedalo l (1 je accept, 0 reject). $C_{j,l}$

$$Prob[C_{j,0}] = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)$$

$$Prob[C_{j,1}] = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)$$

A_l Označme A_l množinu tých behov, ktoré dajú odpoveď l

$X = Y$ Ak $X = Y$, tak neexistuje možnosť, aby $x_j \neq y_j$. V tejto situácii RII rozhoduje pravdepodobnostne. Zaujíma nás pravdepodobnosť korektnej odpovede:

$$\mathbf{Prob}[\mathbf{A_0}] = \sum_{i-1}^{n} Prob[C_{i,0}] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} > \mathbf{1/2}$$

$X \neq Y$ Ak $X \neq Y$, potom existuje taký index j, že $x_j \neq y_j$. Budeme predpokladať, že je jediný(čo nezvýši pravdepodobnosť korektnej odpovede).
Zaujíma nás pravdepodobnosť $A_1 = C_j \cup \{C_{i,1} \mid 1 \leq i \leq n,\ i \neq j\}$, pričom C_j označuje udalosť, keď RI zvolilo jediný index, na ktorom sa X, Y líšia.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Prob}[\mathbf{A_1}] &= Prob[C_j] + \sum_{i \neq j} Prob[C_{i,1}] \\
&= \frac{1}{n} + \sum_{i \neq j} \frac{1}{n}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}) \\
&= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \sum_{i \neq j}(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2}) \\
&= \frac{1}{2n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2n} - \sum_{i \neq j} \frac{1}{2n^2} \\
&= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - \frac{n-1}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} > \mathbf{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

□

3.2.7 Pravdepodobnostné algoritmy pre optimalizačné úlohy

V prípade optimalizačných úloh zrejme nezávislé opakovanie behu algoritmu použijeme na získanie riešenia lepšej kvality.

optimalizačný problém

Definícia 3.6 *Optimalizačný problém je* $U = (\Sigma_I, \Sigma_O, L, L_I, Sol, cena, ciel)$, *kde*

Σ_I	*je vstupná abeceda*
Σ_O	*je výstupná abeceda*
$L \subseteq \Sigma_I^*$	*je jazyk prípustných vstupov*
$L_I \subseteq L$	*je jazyk aktuálnych vstupov*
Sol	$Sol : L \to Pot(\Sigma_O^*) \forall x \in L$ *je* $Sol(x)$ *množina prípustných riešení*
cena	*je účelová funcia;* $cena(x, Sol(x)) \in \mathbb{R}$
ciel	$ciel \in \{min, max\}$

optimálne riešenie Prípustné riešenie $y \in Sol(x)$ *nazveme* optimálnym riešením *pre* x, *ak pre účelovú funkciu platí* $cena(x, y) = ciel\{(x, z), z \in Sol(x)\}$. *Ak* y *je opimálne riešenie pre* x *a* U, *tak označíme*

$$cena(x, y) = OPT_U(x)$$

konzistentný algoritmus Hovoríme, že algoritmus A je *konzistentný* pre U, ak $\forall x \in L_I A(x) \in Sol(x)$. Hovoríme, že algoritmus B *rieši* optimalizačný problém U, ak
- B je konzistentný pre U
- $\forall x \in L_I\ B(x) = OPT_U(x)$

Poznámka Uvedená definícia zachytáva všetky aspekty súvisiace s definíciou optimalizačnej úlohy: vstup je reťazec nad abecedou Σ_I, ale korektný vstup je z jazyka L_I. Analogicky pre výstup. Často budeme používať zjednodušenú formuláciu,

keď problém identifikujeme množinou vstupov I, zobrazením Sol, ktoré vstupu priraďuje množinu prípustných riešení, ohodnocovacou funkciou (m, $cena$,..) a cieľom (max, min).

Kvalita riešenia sa posudzuje prostredníctvom chyby. Zaujíma nás aproximačný pomer $Ratio_A(x) = \max\{\frac{OPT(x)}{A(x)}, \frac{A(x)}{OPT(x)}\}$. Možné sú dva prístupy – zaujímame sa o očakávanú hodnotu $Ratio_A(x)$, alebo nás zaujíma pravdepodobnosť toho, že bude tento pomer v rozumných hraniciach.

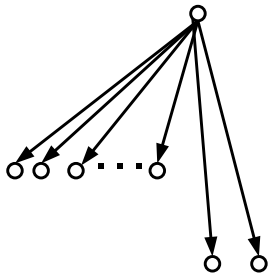
Definícia 3.7 *Algoritmus A je* pravdepodobnostný $E[\delta]$-aproximačný, *ak* *$E[\delta]$-aproximácia*

- $Prob[A(x) \in Sol(x)] = 1$
- $E[Ratio_A(x)] \leq \delta \ \forall x \in L$

Definícia 3.8 *Algoritmus A je* pravdepodobnostný δ-aproximačný, *ak* *δ-aproximácia*

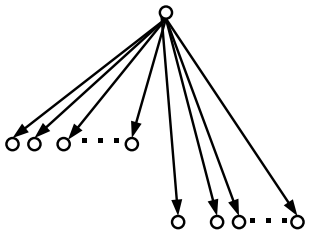
- $Prob[A(x) \in Sol(x)] = 1$
- $Prob[Ratio_A(x) \leq \delta] \geq 1/2 \ \forall x \in L$

Definície sú podobné, nie však totožné.



$$Ratio_{A,x}(C_i) = 2 \quad \text{pre} \quad i = 1, \ldots, 10$$
$$Ratio_{A,x}(C_i) = 50 \quad \text{pre} \quad i = 11, 12$$
$$E[Ratio_A(x)] = 10$$
$$Prob[Ratio_A(x) \leq 2] = 5/6 \geq 1/2$$

Veľa "dobrých", málo "zlých" spôsobí, že hoci je pravdepodobnosť dobrej odpovede slušná, stredná hodnota je zlá.



$$Ratio_A(x) = 11 \quad \text{pre} \quad 1000 \text{ behov}$$
$$Ratio_A(x) = 1 \quad \text{pre} \quad 999 \text{ behov}$$
$$E[Ratio_A(x)] = \frac{11999}{1999} = 6.0025$$
$$Prob[Ratio_A(x) \leq 10] = \frac{999}{1999} = 0.499.. < 1/2$$

Keď je "dobrých" aj "zlých" skoro rovnako, pravdepodobnosť dobrej odpovede môže byť $< 1/2$, ale stredná hodnota je aj tak dobrá.

Nasledujúci jednoduchý fakt sa dá rozumne využiť.

Fakt 3.5 *Pravdepodobnosť udalosti, že náhodná premenná x má hodnotu $\leq 2E[x]$, je aspoň $1/2$.*

Lema 3.6 *Nech $\delta > 0$, U optimalizačný problém. Ak algoritmus B je pravdepodobnostný $E[\delta]-$aproximačný, potom B je $2\delta-$aproximačný.*

Príklad 3.5 *Uvažujme problém Max-kSAT, kde vstupom je formula F v konjunktívnej normálnej forme(KNF), pričom každá klauzula má* presne *k literálov. Chceme vektor, ktorý spĺňa čo najviac klauzúl. Vráťme sa k Algoritmu 21, ktorý vráti náhodne zvolený vektor x. Pre $Z_i(\alpha) = 1 \Leftrightarrow F_i(\alpha) = 1$, $Z_F = \sum_{i=1}^{m} Z_i$ sme ukázali, že $E[Z_F] = \sum E[Z_i] = m(1 - \frac{1}{2^k})$. Keďže $OPT \leq m$,*

$$E[Ratio(F)] = \frac{OPT(F)}{E[Z_F]} \leq \frac{m}{m(1 - \frac{1}{2^k})} = \frac{2^k}{2^k - 1}$$

Ukážeme, že Algoritmus 21 je tiež $\frac{2^{k-1}}{2^{k-1}-1}$-aproximačný.

Keďže
priemerný počet splnených klauzúl $E[Z_F] = m(1 - \frac{1}{2^k})$
$m(1 - \frac{1}{2^k})$ je priemer z $m, m(1 - \frac{1}{2^{k-1}})$
aspoň polovica behov musí spĺňať aspoň $m(1 - \frac{1}{2^{k-1}})$ klauzúl. ◇

MaxCut

Príklad 3.6

vstup: *neohodnotený graf $G = (V, E)$*
výstup: *rozklad (V_1, V_2) množiny vrcholov V*
cena: *$cost((V_1, V_2)) = |E \cap (V_1 \times V_2)|$*
cieľ: *max*

Ukážeme, že náhodná voľba je E[2]-aproximačný algoritmus

Algoritmus 26 RC

$V_1 = V_2 = \emptyset$
$\forall v \in V$ náhodne zvoľ i a $V_i \leftarrow V_i \cup v$
return (V_1, V_2)

Indikačná premenná bude počítať počet hrán rezu. Nech $e = (u, v)$

$$X_e = \begin{cases} 0, & \text{vrcholy } u, v \text{ nepatria do rezu, ale sú spoločne v jednej z množín } V_1, V_2 \\ 1, & \text{hrana } (u, v) \text{ patrí do rezu} \end{cases}$$

$E[X_e] = Prob[x_e = 1]$
$Prob[x_e = 1] = Prob[u \in V_1 \& v \in V_2] + Prob[u \in V_2 \& v \in V_1] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
Takže
$E[x_e] = 1/2$
$X = \sum_{e \in E} x_e$, $E[X] = |E|/2$
$E[Ratio] = \frac{OPT}{E[X]} \leq \frac{|E|}{E[X]} = 2$

◇

Kapitola 4

Metódy tvorby pravdepodobnostných algoritmov

Analýzou existujúcich pravdepodobnostných algoritmov možno "vytiahnuť" niekoľko metód, ktoré sa pri ich návrhu využívajú. Často ide o kombináciu, niekedy možno algoritmus vnímať optikou viacerých metód. Začneme krátkym súhrnom metód, ktoré potom podrobnejšie rozvinieme a odilustrujeme na príkladoch v nasledujúcich podkapitolách.

Eliminácia protihráča

Eliminácia protihráča je v podstate metódou vyhýbania sa najhorším prípadom. Keď máme deterministický algoritmus, vstup pre najhorší prípad pre tento konkrétny algoritmus sa väčšinou konštruuje pomerne jednoducho. Pravdepodobnostný algoritmus je vlastne množinou deterministých algoritmov(keď k vstupu pridáme postupnosť náhodných bitov). Keď teda chcem zlý vstup, mal by byť zlým pre dostatočne veľa týchto algoritmov. Dá sa očakávať, že toto nie je vždy možné. S takýmto prístupom sme sa už stretli.

R_I, R_{II} $x \stackrel{?}{=} y$

V prípade zisťovania rovnosti dvoch vzdialených databáz (reprezentovaných binárnymi reťazcami) bola množina deterministických algoritmov určená množinou prvočísel: porovnanie $x \stackrel{?}{=} y$ sme nahradili porovnaním $x \mod p \stackrel{?}{=} y \mod p$, kde $p \in Prim(n^2)$. Vieme, že aspoň $\frac{Prim(n^2) - (n-1)}{Prim(n^2)} = 1 - \frac{2 \ln n}{n}$-tina odpovedí je korektná.
$\rightsquigarrow$ náhodná voľba prvočísla vedie k veľkej pravdepodobnosti korektnej odpovede; algoritmus je korektný na takmer každom vstupe

QUICKSORT

Algoritmus QUICKSORT je príkladom, keď sa viaceré deterministické stratégie líšia voľbou pivota, pričom
- každá dáva korektnú odpoveď
- každá je efektívna na väčšine vstupov
  $T(1) = 0, \quad T(n) = n - 1 + T(A_<) + T(A_>)$

Videli sme, že náhodná voľba pivota viedla v očakávanom prípade k zložitosti rádovo rovnej dolnému odhadu—$O(n \log n)$

Metóda svedkov

Metóda svedkov je vhodná pre také rozhodovacie problémy, keď nás zaujíma, či daný vstup má alebo nemá nejakú vlastnosť V (napr. či to je prvočíslo). K použitiu metódy je dôležité, aby sme mali

- vhodnú definíciu toho, čo je to svedok. Je to nejaká dodatočná informácia W, ktorá pomáha určiť, či skúmaná vlastnosť platí alebo nie

  $V \rightsquigarrow$ prvočíselnosť $W \rightsquigarrow$ delitele
- dostatočne veľkú efektívne konštruovateľnú množinu kandidátov, medzi ktorými je–v prípade existencie–dostatočne veľa svedkov

Pri prvočíselnosti sú kandidátmi $p \in Prim(n^2)$; je ich aspoň $Prim(n^2)$-$(n-1)$. Pravdepodobnosť, že náhodne zvolený kandidát je svedok je

$$\frac{\frac{n^2}{\ln n^2} - (n-1)}{\frac{n^2}{\ln n^2}} \geq 1 - \frac{\ln n^2}{n}$$

Nemáme algoritmus, ktorý efektívne hľadá svedkov. Zoberme prehľadávanie od najmenšieho prvočísla. Keďže "zlých" prvočísel je nanajvýš $n-1$, po n pokusoch určite skončíme. Zložitosť takéhoto prístupu je však $4n \log n$, čo je veľa. Prečo nevieme garantovať nič lepšie? Lebo kvôli istote potrebujeme $k+1$ pokusov pre vstup (x, y) taký, že $Num(x) - Num(y) = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$

Pre použitie metódy svedkov sú teda vhodné také typy úloh, ktoré spĺňajú nasledujúce podmienky

- existencia svedkov
- efektívna konštrukcia kandidáta+test, či je alebo nie je svedkom
- množina kandidátov bohatá na svedkov

Freivaldsova metóda

Metóda odtlačkov je vlastne špeciálnym prípadom metódy svedkov. Používa sa, keď nás zaujíma rovnosť/ekvivalencia nejakých komplexných objektov.

1. Vezmeme množinu M vhodných zobrazení úplných reprezentácií do čiastočných reprezentácií (napr. $N \rightarrow Prim(n^2)$)
   $h \leftarrow random(M)$

2. vypočítame redukované reprezentácie $h(O_1)$, $h(O_2)$; tomu sa hovorí odtlačok/stopa/fingerprint

3. porovnáme redukované reprezentácie
   if $h(O_1) = h(O_2)$ **then** return("ekvivalentné")
   else return ("nie sú ekvivalentné")

K úspešnému použitiu potrebujeme

- $h(O)$ efektívne počítateľné
- porovnanie $h(O_1) \stackrel{?}{=} h(O_2)$ efektívne vypočitateľné
- existenciu kandidátov/svedkov v M, ktoré potvrdzujú, že $O_1 \neq O_2$

Neprekvapí, že máme tradeoff medzi dĺžkou $h(O)$ a pravdepodobnosťou korektnej odpovede.

náhodná vzorka

Náhodná vzorka/Random sampling využívame v situácii, keď nevieme hľadať objekty daných vlastností ale vieme, že ich je veľa. Potom náhodne vybraná množina kandidátov by s veľkou pravdepodobnosťou mala hľadaný objekt obsahovať.

Táto pravdepodobnostná metóda je založená na dvoch jednoduchých faktoch:

Fakt 4.1 *Ku každej náhodnej premennej X existuje hodnota, ktorá nie je menšia (väčšia) ako $E[X]$*

Fakt 4.2 *Ak pre náhodný objekt je pravdepodobnosť, že má nejakú vlastnosť, nenulová, potom existuje objekt, ktorý túto vlastnosť má.*

Zvyšovanie úspešnosti opakovaním je realizované znižovaním pravdepodobnosti chyby nezávislým opakovaním behov, resp. len ich častí, na tom istom vstupe *opakovanie*

Optimizácia a náhodné zaokrúhľovanie Niekedy je optimalizačný problém ťažký na množine diskrétnych vstupov, ale jeho riešenie na $\mathbb{R}$ je efektívne (napr. lineárne programovanie). V tejto situácii problém často riešime tak, že relaxujeme od diskrétnych hodnôt, vyriešime problém v reálnych číslach a získané riešenie vhodne zaokrúhlime. (V aprox alg—primal-dual metóda pre ..) *zaokrúhľovanie*

Kapitolou samou o sebe je derandomizácia—prehľadný a efektívny pravdepodobnostný algoritmus "derandomizujeme" na determnistický; väčšinou simulovaním všetkých možných behov pravdepodobnostného algoritmu.

4.1 Eliminácia protivníka

V tejto časti sa budeme venovať metóde eliminácie protihráča. Sústredíme sa na konštrukciu triedy deterministických algoritmov pre ktoré platí, že *pre každý vstup je väčšina z nich efektívna.* Aplikujeme na dva príklady.

Pre problém hašovanie ukážeme, že *hašovanie*

- ku každej hašovacej funkcii existuje zlý vstup
- existuje trieda hašovacích fcií H, že pre každý vstup S a náhodnú hašovaciu funkciu $h \in H$, $h(S)$ je "dobre" rozložené

Pre problém plánovania ukážeme, že pravdepodobnostný algoritmus dáva kvalitatívne lepšie riešenie ako ľubovoľný deterministický algoritmus. *on line plánovanie*

4.1.1 Hašovanie

Uvažujme problém data managementu, keď podľa kľúča k hľadáme v štruktúre T. Operácie, ktoré potrebujeme realizovať, sú—Search(T,k), Insert(T,k), Delete(T,k). Ide o implemntáciu tzv. slovníka, keď na implementáciu množiny objektov použijeme tabuľku spolu s vhodným hašovaním.

- tabuľka T s priamym prístupom, $T = \{0, 1, \ldots, m-1\}$
- univerzum $U = \{0, 1, \ldots, d\}$; $|U| \ggg |T|$
- zaujíma nás taká hašovacia funkcia/zobrazenie $h : U \to T$, pre ktorú je $S \subseteq U, |S| = n$, a pritom vyžadujeme, aby S bola "dobre rozložená v T": v priemere $\frac{|S|}{|T|} = \frac{n}{m}$ prvkov zahašovaných do jednej bunky/hodnoty
- b-ta bunka má zoznam ℓ prvkov zahašovaných na hodnotu b; potom zložitosť realizácie inštrukcií–najhorší prípad ℓ, očakávaný $\ell/2$

Od zobrazenia h vyžadujeme nasledujúce vlastnosti
– dá sa efektívne vypočítať
– pre *väčšinu* $S \subseteq U$ prvky "rovnomerne rozhadzuje"; inými slovami
$T(i) = \{a \in S \mid h(a) = i\} \quad \Rightarrow \quad |T_i| = O\left(\frac{|S|}{|T|}\right)$
Uvedomme si, že nič lepšie žiadať nemôžeme, nakoľko pre
$S = U_{h,i} = \{a \in U \mid h(a) = i\}$, sa celá množina S zobrazí do jednej bunky...

Lema 4.3 *Nech* $U = \mathbb{N}$, $T = \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $n \in \mathbb{N}^+$, $h : U \to T$ *spĺňa:* $Pr[h(x) = i] = \frac{1}{m}$. *Potom*

- *očakávaný počet prvkov v jednej bunke je* $\frac{n}{m} + 1$
- *ak* $n = m$, *potom* $Pr[$*viac ako jeden prvok* $h(x) = i]) < 1/2$

Dôkaz: Vezmime $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ náhodne z U

$$X^l_{i,j}(S) = \begin{cases} 1, & \text{ak } h(s_i) = h(s_j) = l \\ 0, & \text{inak} \end{cases}$$

$$E[X^l_{i,j}] = Pr[h(s_i) = l]Pr[h(s_j) = l] = \frac{1}{m^2}$$

Ohraničíme počet kolízií v l-tej bunke

$$E[X^l] = \sum_{1 \le i < j \le n} E[X^l_{i,j}] = \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{1}{m^2} = \frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{m^2} < \frac{n^2}{2m^2}$$

$$n = m \quad \Rightarrow \quad E[X^l] < 1/2$$

Nech k prvkov z S ide do l-tej bunky; potom máme $\binom{k}{2}$ kolízií

$$\frac{n^2}{2m^2} > E[X^l] = \frac{k(k-1)}{2} > \frac{(k-1)^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{m} + 1 > k$$

□

Ak je teda $n \sim m$, tak očakávaná zložitosť je $O(1)$. Reálne data ale nie sú veľmi rovnomerne rozložené...

univerzálna trieda hašovacích funkcií

Definícia 4.1 *Nech* H *je konečná množina hašovacích funkcií* $U \to T = \{0, 1, , \ldots, m-1\}$. H *je univerzálna trieda funkcií, ak* $\forall x, y \in U, x \neq y$

$$|\{h \in H \mid h(x) = h(y)\}| \le \frac{|H|}{m}$$

Veta 4.4 *Nech* $S \subseteq U$, $|S| = n$, H *je univerzálna trieda hašovacích funkcií. Potom pre každé* $x \in S$ *a náhodnú hašovaciu funkciu* $h \in H$ *pre očakávanú veľkosť množiny* $S_x(h) = \{a \in S \mid a \neq x,\ h(a) = h(x)\}$ *platí*

$$E[|S_x(h)|] \le \frac{|S|}{|T|} = \frac{n}{m}$$

Dôkaz: Uvažujme náhodnú premennú $Z_{x,y}(h)$, ktorá pre hašovaciu funciu h identifikuje kolíziu medzi x, y a premennú $Z_x(h)$, ktorá spočíta počet kolízií s prvkom x. Stredná hodnota $Z_x(h)$ určuje očakávaný počet kolízií.

$Z_{x,y}(h) = \begin{cases} 1, & h(x) = h(y) \\ 0, & h(x) \neq h(y) \end{cases}$ $\quad E[Z_{x,y}(h)] = Pr[h(x) = h(y)] \le 1/m$

$$Z_x(h) = \sum_{y \in S, x \neq y} Z_{x,y}(h) \quad E[Z_x(h)] = \sum_{y \in S, x \neq y} E[Z_{x,y}(h)] \le \frac{|S| - 1}{m} < \frac{n}{m}$$

□

Univerzálna trieda hašovacích funkcií existuje, stačí zobrať všetky funkcie $U \to T$.

Lema 4.5 *Trieda* $H_{U,T} = \{h \mid h : U \to T\}$ *je univerzálna trieda hašovacích funkcií.*

Dôkaz: Nech $|T| = m$

- $|H_{U,T}| = m^{|U|}$
- $|H(x,y,i)| = |\{h \mid h(x) = h(y) = i\}| = m^{|U|-2}$
- $|H(x,y)| = \{h \mid h(x) = h(y)\} = \sum_{i=0}^{m-1} |H(x,y,i)| = m^{|U|-1} = \frac{|H_{U,T}|}{m}$

□

Trieda $H_{U,T}$ však pre naše účely nie je vhodná, pretože
– je príliš veľká
– väčšina funkcií nemá efektívnu reprezentáciu

Existujú aj univerzálne triedy hašovacích funkcií, ktoré sú praktické. Zoberme ako univerzum $U = \{0, 1, \ldots, p-1\}$, hašovacia tabuľka T je veľkosti m, pričom p, m sú prvočísla. Ukážeme, že vhodnou univerzálnou triedou hašovacích funkcií je napr. nižšie definovaná trieda hašovacích funkcií H^p_{lin}: H^p_{lin}

$$h_{a,b}(x) = ((ax + b) \mod p) \mod m$$

$$H^p_{lin} = \{h_{a,b} \mid a \in \{1, 2, \ldots, p-1\};\ b \in \{0, 1, \ldots, p-1\}\}$$

Veta 4.6 *Pre každé prvočíslo p (a číslo m) je trieda H^p_{lin} univerzálnou triedou hašovacích funkcií z $U = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ do $T = \{0, 1, \ldots, m-1\}$*

Dôkaz: Označme

$$H^p_{lin}(x,y) = \{h_{a,b} \in H^p_{lin},\ h_{a,b}(x) = h_{a,b}(y)\}$$
$$M(x,y) = \{(r,s) \in U \times U \mid r \neq s \text{ a } r \equiv s \mod m\}$$

Zrejme $|H^p_{lin}(x,y)| = |M(x,y)|$. Potrebujeme ukázať, že $\forall x, y : |H^p_{lin}(x,y)| \leq \frac{|H^p_{lin}|}{m}$. Uvažujme najprv zjednodušenú verziu $h'_{a,b}(x) = (ax + b) \mod p$.

1. Ukážeme, že $f_{x,y}(a,b) = (h'_{a,b}(x), h'_{a,b}(y))$ je bijekcia; $a, b \overset{h'_{a,b}}{\rightsquigarrow} r, s$
2. Spočítame, koľko je k danému r takých s, že $r \neq s \mod p$ ale $r = s \mod m$

1. Poďme argumentovať, že $f_{x,y}$ je bijekcia. Nech $r = h'_{a,b}(x) = (ax+b) \mod p$, $s = h'_{a,b}(x) = (ay + b) \mod p$.

Kvôli sporu predpokladajme, že $x \neq y$ a $r = s$. Potom $x \neq y \Rightarrow r \neq s$

$$0 = r - s \equiv a(x - y) \mod p$$

Keďže p je prvočíslo, znamenalo by to $a \equiv 0 \mod p$ alebo $x \equiv y \mod p$, čo vzhľadom k voľbe a, x, y nie je možné. Preto $x \neq y \Rightarrow r \neq s$. To ale znamená, že $f_{x,y}$ je zobrazenie z $\underbrace{\{U - \{0\}\}}_{ls} \rightarrow \underbrace{\{(r,s) | r,s \in U, r \neq s\}}_{rs}$. Keďže $|ls| = p(p-1) = |rs|$, stačí ukázať, že jedna z $f_{x,y}, f^{-1}_{x,y}$ je injektívna.

Nech $r \neq s$. Keďže p je prvočíslo, pre $x \neq y, 0 \leq x, y \leq p-1$ inverzný prvok k $(x - y)$ existuje : $r \neq s \Rightarrow a \neq b$

$$\begin{aligned} r - s = a(x - y) \mod p \quad &\Rightarrow \quad a = (r - s)(x - y)^{-1} \mod p \\ &\Rightarrow \quad b = (r - ax) \mod p \end{aligned}$$

2. Pre x, y voľba náhodne zvolenej $h_{a,b}$ jednoznačne určuje dvojicu (r,s) takú, že $(r,s) = (h'_{a,b}(x), h'_{a,b}(y))$, preto $|H^p_{lin}(x,y)| = |M(x,y)|$. K výpočtu $|H^p_{lin}(x,y)|$ preto stačí spočítať, koľko je takých $r \neq s$, že $r \equiv s \mod m$.

K jednému r je $\lceil \frac{p}{m} \rceil \leq \frac{p+m-1}{m} = \frac{p-1}{m} + 1$ takých s, že $r \equiv s \mod m$. Preto

$$|H^p_{lin}(x,y)| = |M(x,y)| \leq \frac{p(p-1)}{m} = \frac{|H^p_{lin}|}{m}$$

□

Vec

Ďalším príkladom je trieda hašovacích funkcií, ktorú konštruujeme k univerzu $U(r,m)$, kde m je prvočíslo, $r \in \mathbb{N}$

$$U(m,r) = \{x = (x_0, \ldots, x_r);\ 0 \leq x_i \leq m-1, i = 0, \ldots, r\} = T^{r+1}$$

Nech $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_r) \in T^{r+1}$; definujme

$$\mathsf{Vec} = \{h_\alpha; \alpha \in T^{r+1}\},\ \text{kde}\ h_\alpha(x_0, \ldots, x_r) = \left(\sum_{i=0}^{r} \alpha_i x_i \right) \mod m$$

Lema 4.7 *Vec je univerzálna množina hašovacích funkcií*

Dôkaz: Ukážeme, že $\forall x \neq y$ je $|H_\alpha(x,y)| = |\{h_\alpha \in \mathsf{Vec} \mid h_\alpha(x) = h_\alpha(y)\}| \leq \frac{|\mathsf{Vec}|}{m} = m^r$
Ak $x \neq y$, tak sa tieto vektory líšia aspoň v jednej zložke; pre jednoduchosť nech $x_0 \neq y_0$.

$$\begin{array}{rcll} h_\alpha(x) = h_\alpha(y) & \Leftrightarrow & \sum_{i=0}^{r} \alpha_i x_i & \equiv & \sum_{i=0}^{r} \alpha_i y_i \mod m \\ & & \alpha_0(x_0 - y_0) & \equiv & \sum_{i=0}^{r} \alpha_i (y_i - x_i) \mod m \end{array}$$

Keď m je prvočíslo, existuje pre $x_0 \neq y_0$ inverzný prvok $(x_0 - y_0)^{-1}$. Preto

$$\alpha_0 \equiv \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (y_i - x_i)(x_0 - y_0)^{-1} \mod m$$

Hodnota α_0 je teda jednoznačne určená hodnotami $x, y, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$, čo znamená, že $|H_\alpha(x,y)| \leq m^r$. □

Pozitívne na množine Vec je to, že
- vieme efektívne generovať náhodné h_α
- h_α sa efektívne počíta.

4.1.2 On line algoritmy

On line problém je taký, keď postupnosť vstupov prichádza postupne a rozhodnutia treba robiť priebežne. Otázka je, nakoľko dobrý môže byť algoritmus, ktorý nepozná dopredu budúcnosť v porovnaní s tým, ktorý celú budúcnosť pozná dopredu. Čo považujeme za kvalitu?

kvalita on-line algoritmov

- kvalita riešenia
- zložitosť

motivačné príklady

dispečing obmedzený počet sanitiek/taxíkov/... obsluhuje požiadavky naň. Dispečér priebežne rozhoduje, koho kam pošle. Kritéria optimalizácie

- celkový počet najazdených km
- čas čakania pacientov/pasažierov -celkový resp. maximalizovaný na jedného

rozvrhovanie/scheduling analogicky - máme niekoľko strojov rôznej kvality a požiadavky na ne. Prideľujeme úlohy strojom, pričom optimalizujeme

- celkový čas
- priemerné zaťaženie

- čas čakania

on-line algoritmus

Majme optimalizačný problém $U = (I, Sol, m, ciel)$. Algoritmus A je online pre U, ak pre každý vstup $x = x_1, \ldots, x_n \in I$

- $x_1, \ldots, x_i$ je prípustný vstup $\forall 1 \leq i \leq n$
- $\mathsf{A}(x) \in Sol(x)$
- $\mathsf{A}(x_1, \ldots, x_i)$ je časť $\mathsf{A}(x)$ $\forall 1 \leq i \leq n$

vstup $x_1, \ldots, x_n \quad \rightsquigarrow \quad$ výstup $y_1, \ldots, y_n$, $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_i)$

$Comp_{\mathsf{A}}(x)$

Kvalitu algoritmu A meriame vzhľadom k optimálnemu off-line algoritmu, resp. jeho cene.

$$Comp_{\mathsf{A}}(x) = \max\left\{\frac{OPT_U(x)}{m_{\mathsf{A}}(x)}, \frac{m_{\mathsf{A}}(x)}{OPT_U(x)}\right\}$$

V prípade aproximačných algoritmov definujeme chybu a aproximačný prah ako hranicu "najlepšej" kvality, v prípade on-line algoritmov máme analogické pojmy.

δ-ťažký problém

Nech $\delta \geq 1$ je konštanta. Hovoríme, že on-line algoritmus A je *δ-competitive*, ak $\forall x\ Comp_{\mathsf{A}}(x) \leq \delta$. On-line problém je δ-ťažký, ak neexistuje d-competitive algoritmus na jeho riešenie pre žiadne $d < \delta$.

stránkovanie

Príklad 4.1 *Majme cash/buffer veľkosti k, ostatné stránky nech sú v pomalej pamäti. Zo vstupu prichádzajú požiadavky na stránky. Ak požadovaná stránka s nie je v buffri, musíme niektorú zo stránok v buffri vyhodiť a presunúť tam požadovanú stránku s; v takomto prípade máme presun. Chceme minimalizovať počet presunov medzi cash a hlavnou pamäťou.*

začiatok: $s_1, \ldots, s_k$ *v Cash*
$s_{k+1}, \ldots, s_n$ *v Main;* $n \ggg k$

inštancia: *postupnosť indexov* $i_1, i_2, \ldots, i_m$; $1 \leq i_j \leq n$

cieľ: *minimalizovať počet presunov medzi Cash a Main*

protihráč

Ukážeme, že problém Stránkovanie je k-ťažké. Spravíme to popisom stratégie protihráča, ktorý k ľubovoľnému algoritmu A skonštruuje "zlý" vstup x_A

1. *pri požiadavke $(k+1)$ na stránku s_{k+1} musí algoritmus A vyhodiť niektorú stránku z buffra-povedzme stránku s indexom j_1*
2. *po vyhodení stránky s_{j_1} prichádza od protihráča požiadavka j_1; algoritmus A vyhadzuje j_2*

   $\vdots$

Je zrejmé, že nech by sme mali akýkoľvek algoritmus, takto konštruovaný vstup $k+1, j_1, \ldots, j_{k-1}$ vyžaduje k presunov. Pritom optimálne—offline—riešenie v prvom kroku vyhodí $i \in \{1, \ldots, k\} - \{j_1, \ldots, j_{k-1}\}$, preto mu na spracovanie rovnakej postupnosti stačí len jeden presun.

$$Comp_A(x_A) = \frac{costA(x_A)}{OPT(x_A)} = \frac{k}{1} = k$$

$\diamond$

Definícia 4.2 *Pravdepodobnostný algoritmus A je* pravdepodobnostný online algoritmus *pre problém U ak $\forall x_1 \ldots x_n \in L$ a $\forall 1 \leq i \leq n-1$*

- *výstup každého behu $\mathsf{A}(x_1, \ldots, x_i)$ je prípustné riešenie*

- *pre každý vsup* $C(x_1,\ldots,x_i),x_{i+1}$, *kde* $C(x_1,\ldots,x_i)\in M(x_1,\ldots,x_i)$, *všetky behy* A *dopočítajú prípustné riešenie pre* $x_1,\ldots,x_{i+1}$

  vstup $x_1\ldots x_ix_{i+1}$ $\rightsquigarrow$ *výstup* $y_1,\ldots,y_{i+1}$
  $y_{i+1}=f_{i+1}(x_1,\ldots,x_{i+1})=g_{i+1}(f_i(x_1,\ldots,x_i),x_{i+1})$

Pre inštanciu vstupu X máme

$\mathbf{S_{A,X}}$ je množina výpočtov A na X

$\mathbf{Prob_{A,X}}$ je odpovedajúce pravdepodobnostné rozdelenie na $S_{A,X}$

$\mathbf{Z_X(C)}=Comp_C(X)$ je náhodná premenná v $(S_{A,X},Prob_{A,X})$

Kvalitu meriame očakávanou hodnotou

$\mathbf{Exp-Comp_A(X)}=E[Z_x]$

Nech $\delta\in R$. Hovoríme, že A je **E[δ]-competitive**, ak $Exp-Comp_A(X)=E[Z_X]\leq\delta$

Nech $h:\mathbb{N}\to R^{\geq 1}$. Hovoríme, že A je **Exp[h]-competitive**, ak $Exp-Comp_A(X)=E[Z_X]\leq h(|x|)$

Cieľom tejto časti je na probléme rozvrhovania ukázať, že existujú problémy, pre ktoré pravdepodobnostný algoritmus dosahuje lepšiu kvalitu ako najlepší možný deterministický algoritmus.

problém

Problém Rozvrhovanie predpokladá

- máme m rôznych (typov) strojov $M_1,\ldots,M_m$, pričom z každého typu stroja je len jeden kus
- *job* je m úloh $A_1,\ldots,A_m$ reprezentovaných permutáciou indexov $i_1,\ldots,i_m$; job $(i_1,\ldots,i_m)$ znamená, že
  - úlohy treba počítať v poradí $A_1,\ldots,A_m$; najskôr jednu úlohu dokončiť, potom druhú začať
  - A_j sa musí riešiť na stroji M_{i_j}
  - idealizovane predpokladáme, že výpočet na každom stroji trvá presne jednotku času

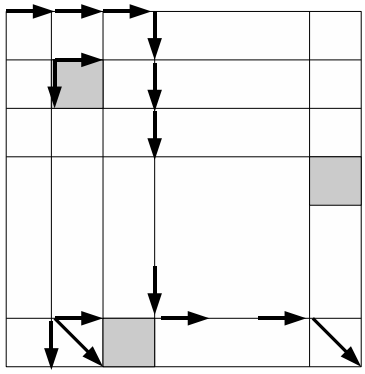
Unit(m,d), resp. skrátene $U(m,d)$

vstup: m typov strojov, d jobov(m-tíc úloh)
výstup: pridelenie úloh jednotlivým strojom v diskrétnom čase tak, aby každý robil vždy len na jednej úlohe a aby príslušná úloha mala k dispozícii všetky potrebné výsledky (zachovanie poradia)

Budeme uvažovať najjednoduchšiu verziu úlohy $U(m,2)$. Vstupom sú dva vektory $\alpha=(i_1,\ldots,i_m)$ a $\beta=(j_1,\ldots,j_m)$. Predstavme si ich ako $m\times m$ mriežku $G(\alpha,\beta)[j,k]$, pričom riadky odpovedajú β, stĺpce α. **Kolízia** nastáva, ak $G[k,\ell]=j_k=i_\ell$

Ľahko vidno, že ak úlohy $j_1,\ldots,j_{k-1}$ a $i_1,\ldots,j_{\ell-1}$ skončili naraz a $j_k\neq i_\ell$, potom možno úlohy j_k a i_ℓ počítať paralelne; inak jedna z nich musí počkať.

Do mriežky na miesta kolízií dáme značku. Hýbať sa možno smerom doprava a dole a to po riadkoch, stĺpcoch a diagonálach, ak tam nie je značka. Priradenie je cesta z ľavého horného do pravého spodného rohu.



Pohyb po horizontálnej šípke aj pohyb po vertikálnej šípke odpovedajú tomu, že jedna úloha stojí. Keďže máme štvorcovú mriežku, je počet vertikálnych a horizontálnych šípok na každej ceste rovnaký.

Majme teda cestu S

$$\left.\begin{array}{ll} del_\alpha(S), & \text{počet vertikálnych hrán na ceste } S \\ del_\beta(S), & \text{počet horizontálnych hrán na ceste } S \end{array}\right\} delay(S) = del_\alpha(S) = del_\beta(S)$$

$$cost(S) = m + delay(S) = m + \frac{del_\alpha(S) + del_\beta(S)}{2}$$

Fakt 4.8 *Pre $m \in \mathbb{N}$ má každá inštancia (α, β) pre $U(m, 2)$ presne m konfliktov, pričom v každom riadku a každom stĺpci je práve jeden konflikt.*

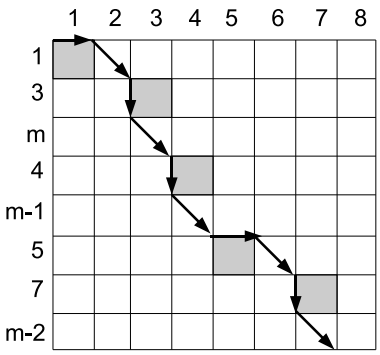
Najprv ukážeme, že vieme konštruovať zlé vstupy.

Lema 4.9 *Nech $m = 0 \mod 8$. Pre každý online algoritmus A riešiaci $U(m, 2)$ existuje taká inštancia $I = ((1, 2, \ldots, m), \beta)$, že*

$$cost(A(I)) \geq m + \frac{m}{8}$$

Dôkaz: Popíšeme stratégiu protivníka, ktorý bude ukladať konflikty tak, že časť cesty, ktorá prejde za $m/2$ ty riadok a $m/2$-ty stĺpec, použije aspoň polovicu hrán, ktoré nie sú diagonálne. To bude znamenať, že nabrala zdržanie aspoň polovicu z $\frac{1}{2}\frac{m}{2}$, čo je požadovaných $m/8$.
Konštruujeme $\beta = j_1, \ldots, j_m$

- $j_1 = 1$ spôsobí, že máme konflikt. Algoritmus môže značku obísť po vertikálnej alebo horizontálnej hrane, oboje spôsobí prírastok 1 do príslušnej $del_\alpha(S)$ alebo $del_\beta(S)$
- Ak algoritmus obišiel značku po horizontálnej hrane, α má riešiť úlohu 2, β úlohu 1–toto sa rieši paralelne. Sme v pozícii, keď α ide riešiť úlohu 3 a my chceme, aby aj β riešila úlohu 3–dáme teda $j_2 = 3$
- Ak algoritmus obišiel značku po vertikálnej hrane, α má riešiť úlohu 1, β novú úlohu j_2. Aby sa to dalo riešiť paralelne, položíme $j_2 = m$ a potom voľba $j_3 = 2$ spôsobí opäť konflikt.



Takto postupujeme ďalej. Ak algoritmus obchádza prekážku po horizontálnej hrane, doplníme na príslušné miesto v β prvok z množiny $\{1, 2, \ldots, m/2\}$. Ak ju obíde po vertikálnej hrane, budeme vkladať prvok z množiny $\{m/2+1, \ldots, m\}$ □

Teraz odhadneme zložitosť najlepšieho offline deterministického algoritmu. Vezmeme množinu konkrétnych deterministických stratégií, spočítame strednú hodnotu pri ich použití. Potom optimálny algoritmus nemôže byť horší ako táto stredná hodnota.

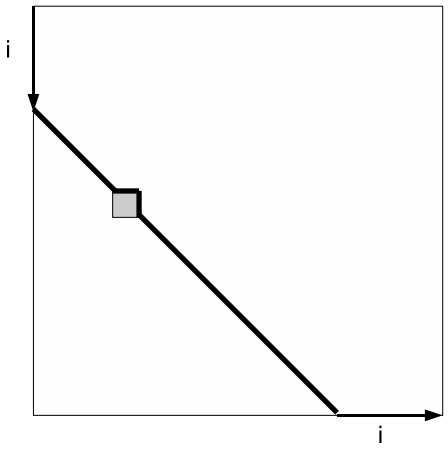
Lema 4.10 *Nech $m \in \mathbb{N}$. Pre každý vstup I do $U(m,2)$ platí*

$$Opt(I) \leq m + \sqrt{m}$$

Dôkaz: Kvôli zjednodušeniu uvažujme $m = k^2$.

Pre $i = 0, 1, \ldots, k$ označme
D_i diagonálu, ktorá ide z $(0, i)$ do $((m-i, m))$
D_{-i} diagonálu, ktorá ide z $(i, 0)$ do $((m, m-i))$

Stratégia $A(j), j \in \{-\sqrt{m}, \ldots, 0, \ldots, \sqrt{m}\}$ príde po obvode k diagonále D_i, potom sa snaží ísť po diagonále D_i a následne po obvode najkratšou cestou do pravého spodného rohu. Ak sú na diagonále prekážky, obchádza ich jednou horizontálnou a jednou vertikálnou hranou.



Analogicky stratégia $A(-i)$ (pozri obr.)

Pre cenu stratégie $A(i)$ potom platí
$cost(A(i)) = |i| + (m - |i|) + |i| +$ počet prekážok $= m + \underbrace{|i| + \text{ počet prekážok}}_{\text{zdržanie}}$

Keďže je počet všetkých prekážok m, pre súčet diagonálnych stratégií dostávame

$$m + \sum_{i=-\sqrt{m}}^{\sqrt{m}} |i| = m + 2\sum_{i=1}^{\sqrt{m}} |i| = m + 2\frac{\sqrt{m}(\sqrt{m}+1)}{2} = 2m + \sqrt{m}$$

Priemerný počet zdržaní je potom

$$\frac{2m+\sqrt{m}}{2\sqrt{m}+1} \leq \frac{2m+\sqrt{m}}{2\sqrt{m}} \leq \sqrt{m} + 1/2$$

Existuje teda algoritmus so zdržaním nanajvýš $\sqrt{m}$ a optimálny od neho nemôže byť horší. Preto $Opt(I) \leq m + \sqrt{m}$. □

Na základe lemy 4.9 a lemy 4.10 máme nasledujúce tvrdenie.

Veta 4.11 *Problém $U(m,2)$ je $(9/8 - \varepsilon)$-ťažký.*

Dôkaz: Z lemy 4.9 vieme, že ku každému algoritmu A existuje inštancia I, na ktorej je $cost_{\mathsf{A}}(I) \geq m + \frac{m}{8}$. Lema 4.10 zas ohraničuje cenu optimálneho algoritmu. Preto

$$Comp_{\mathsf{A}}(I) = \frac{cost_{\mathsf{A}}(I)}{Opt(I)} \geq \frac{\frac{9}{8}m}{m+\sqrt{m}} = \frac{9}{8}\left(1 - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{m}+1}}_{\varepsilon}\right)$$

□

A teraz konečne ten pravdepodobnostný algoritmus

Algoritmus 27 DIAG

1: náhodne zvoľ $i \in \{-\sqrt{m}, \ldots, \sqrt{m}\}$
2: rieš stratégiou $A(i)$

Veta 4.12 *Algoritmus DIAG je pravdepodobnostný online, pričom pre každú inštanciu vstupu I do $U(m,2)$ platí*

$$ExpComp_{DIAG}(I) \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{2m}$$

Dôkaz: Na základe predchádzajúcich úvah

- očakávaný počet zdržaní pre stratégiu $A(i)$ je nanajvýš $\lceil\sqrt{m}\rceil + 1/2$.
- očakávaný čas je nanajvýš $m + \lceil\sqrt{m}\rceil + 1/2$
- $Opt \geq m$

$$ExpComp_{DIAG}(i) = \frac{\text{očakávaná cena}}{Opt(I)} \leq \frac{m + \lceil\sqrt{m}\rceil + 1/2}{m} = 1 + \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{2m}$$

□

záverom

O probléme $U(m,2)$ sme ukázali
– je $(9/8 - \varepsilon)$-ťažký
– existuje pravdepodobnostný algoritmus s ExpComp nanajvýš $1 + \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{2m}$

4.2 Metóda odtlačkov

Ako sme už povedali, metóda odtlačkov sa používa, keď nás zaujíma rovnosť/ekvivalencia nejakých komplexných objektov.

1. Vezmeme množinu M vhodných zobrazení úplných reprezentácií do čiastočných reprezentácií (napr. $N \to Prim(n^2)$)
   $h \leftarrow random(M)$
2. vypočítame redukované reprezentácie $h(O_1)$, $h(O_2)$; tomu sa hovorí odtlačok/stopa/fingerprint
3. porovnáme skrátené reprezentácie
   if $h(O_1) = h(O_2)$ **then return** ("ekvivalentné")
   else return ("nie sú ekvivalentné")

K úspešnému použitiu potrebujeme

- $h(O)$ efektívne počítateľné
- porovnanie $h(O_1) \stackrel{?}{=} h(O_2)$ efektívne vypočitateľné
- existenciu dostatočne veľkej množiny kandidátov/svedkov v M, ktorí v prípade $O_1 \neq O_2$ potvrdzujú, že $O_1 \neq O_2$

Dôraz je na konštrukcii tej množiny M. Jej kardinalita je určená dĺžkou popisu jednotlivých objektov a tak proti sebe idú snaha o dostatočné množstvo kandidátov a snaha o krátky popis.

4.2.1 Porovnávanie databáz

Aplikáciou tejto metódy je Algoritmus 17 na porovnanie dvoch vzdialených databáz. Analogickým spôsobom môžme riešiť viaceré podobné príklady

Príklad 4.2 *Majme vzdialené databázy. X, U_i, V_j označujú podľa kontextu reťazec ale aj číslo s binárnym zápisom X, resp. U_i, V_j*

R_I: $X = x_1 \dots x_n$
R_{II}: $U = \{U_1, \dots, U_k\}$; $U_i \in \{0,1\}^n$

Zaujíma nás, či $X \in U$.
Množina zobrazení/vytváraní odtlačkov vzniká využitím prvočísel – pre prvočíslo p označuje h_p funkciu, ktorá ako odtlačok berie $\bmod p$

$$M = \{h_p \mid p \in Prim(n^2)\}$$

Algoritmus je jasný

Algoritmus 28 — Test X ∈U

RI:

1: náhodne vyber $h_p \in M$
2: $s \leftarrow X \mod p$
3: pošli s, p druhému počítaču RII

RII:

1: vypočítaj $q_i \leftarrow U_i \mod p$
2: **if** $s \in \{q_1, \dots, q_k\}$ **then** return "$X \in U$"
3: **else** return "X∉ U"

chyba

Je zrejmé, že keď $X \in U$, ľubovoľná voľba h_p (výpočet C(p)) vedie ku korektnej odpovedi. Chyby sa môžme dopustiť len vtedy, ak $X \notin U$ ale existuje U_i tak, že $X \equiv U_i \mod p$. Vieme, že pre konkrétne i je počet takýchto "zlých" prvočísel nanajvýš $n-1$, pričom n je dĺžka zápisu X. Ak teda označíme

$$A_i = \{p \mid p \in Prim(n^2) \ \& \ s = q_i v \text{ behu } C(p)\}$$

$$A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$$

tak

$$Error(X,U) = Prob(A) = \sum_{i=1}^{k} Prob(A_i) \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{2\ln n}{n} = k \cdot \frac{2\ln n}{n}$$

Pre $k \leq \frac{n}{4\ln n}$ je pravdepodobnosť chyby nanajvýš 1/2. Inými slovami, ak mohutnosť množiny U je nanajvýš $\frac{n}{4\ln n}$, je Algoritmus 4.2 Monte Carlo algoritmus s jednosmernou chybou.

Analogicky riešime problém neprázdneho prieniku dvoch databáz.

Príklad 4.3 *Majme vzdialené databázy*
R_I: $V = \{V_1 \dots V_\ell\}; V_i \in \{0,1\}^n$
R_{II}: $U = \{U_1, \dots, U_k\}$; $U_i \in \{0,1\}^n$
Zaujíma nás $V \bigcap U \stackrel{?}{=} \emptyset$.

Algoritmus 29 — Test V∩U

RI:

1: náhodne vyber $h_p \in M$
2: $s_i \leftarrow V_i \mod p$
3: pošli $s_1, \dots, s_\ell, p$ druhému počítaču RII

RII:

1: vypočítaj $q_i \leftarrow U_i \mod p$
2: **if** $\{s_1, \dots, s_\ell\} \cap \{q_1, \dots, q_k\} = \emptyset$ **then** return "$V \cap U = \emptyset$"
3: **else** return "$V \cap U \neq \emptyset$"

Algoritmus prekomunikuje $(\ell+1)2\lceil \log n \rceil$ bitov. *komunikácia*

Je zrejmé, že keď $V \cap U = \emptyset$, ľubovoľná voľba h_p (výpočet C(p)) vedie ku korektnej odpovedi. Chyby sa môžme dopustiť len vtedy, ak $V \cap U \neq \emptyset$, ale existujú U_i, V_j tak, že $U_i \equiv V_j \mod p$. Ak teda označíme B_i udalosť, keď $s_i \in \{q_1, \dots, q_k\}$, tak *chyba*

$$Error(V,U) = Prob(\bigcup_{i=1}^{\ell} B_i) \leq \sum_{i=1}^{\ell} k \cdot \frac{2\ln n}{n} = \ell k \cdot \frac{2\ln n}{n}$$

Pre $\ell k = o(\frac{n}{\ln n})$ máme Monte Carlo algoritmus s jednosmernou chybou.

Uvedomme si, že ak zväčšíme množinu M tak, že budeme uvažovať prvočísla $p \in Prim(n^d)$, počet "zlých" prvočísel sa nezmení, ale zmenší sa pravdepodobnosť chyby. Pre $X = x_1 \dots x_n, Y = y_1 \dots y_n$ totiž

$$Pr[X \equiv Y \mod p \mid X \neq Y] \leq \frac{n-1}{Prim(n^d)} \leq \frac{d\ln n}{n^{d-1}}$$

Vo všetkých uvedených príkladoch sme objekty porovnávali na základe "odtlačkov", ktorými boli zvyšky po delení prvočíslom. Iným prístupom je Freivaldsova metóda, ktorá ako odtlačky používa hodnotu polynómu/matice/funkcie v bodoch.

4.2.2 Freivaldsova metóda - ekvivalencia polynómov

Príkladom využitia Freivaldsovej metódy bol Algoritmus 20 na porovnanie $AB = C$ pre matice A,B,C. Zvolili sme náhodný vektor α a odpoveď na otázku $AB \stackrel{?}{=} C$ sme spravili na základe výsledku porovnania $AB\alpha \stackrel{?}{=} C\alpha$. Analogický postup môžme využiť pre porovnávanie polynómov (a iných štruktúr, ktoré sa na porovnanie polynómov dajú transformovať).

Vstupom sú polynómy $P_1(X), P_2(X)$ stupňa nanajvýš n. Zaujíma nás, či $P_1(X) = P_2(X)$. Ak chceme deterministický algoritmus na porovnanie polynómov, využijeme ich "normálny tvar"

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i$$

resp.

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1=0}^{d} \cdots \sum_{i_n=0}^{d} c_{i_1} \cdots c_{i_n} x_1^{i_1 \cdots x_n^{i_n}}$$

pre polynóm $Q(x_1, \ldots, x_n)$ n premenných, z ktorých každá môže byť stupňa nanajvýš d. Toto deterministické porovnanie má tú nevýhodu, že "normálny" tvar môže byť až exponenciálne dlhý vzhľadom k zadanému tvaru polynómu; napr. $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3) \cdots (x_1 + x_n)$

Uvažujme tento jednoduchý algoritmus

Algoritmus 30 — Test $P_1(X) = P_2(X)$

Nech polynómy P_1, P_2 stupňa n majú premenné z poľa F, nech $S \subseteq F$, $|S| \geq n+1$

1: náhodne vyber $r \in S$
2: $p_1 \leftarrow P_1(r),\ p_2 \leftarrow P_2(r)$
3: **if** $p_1 = p_2$ **then** return "$P_1(X) = P_2(X)$"
4: **else** return "$P_1(X) \neq P_2(X)$"

chyba

Potrebujeme odhadnúť pravdepodobnosť chybnej odpovede. Ak sú polynómy rovnaké, chyby sa evidentne nedopustíme. Chyba nastane vtedy, ak pre polynóm $Q(X) = P_1(X) - P_2(X)$, ktorý nie je identicky rovný 0, zvolíme r tak, že $Q(r) = 0$.

Fakt 4.13 *Polynóm stupňa d má nanajvýš d rôznych koreňov.*

Na základe faktu 4.13 je pravdepodobnosť chyby nanajvýš $\frac{n}{|S|}$. Ak chceme chybu zmenšiť, môžme zväčšiť množinu S, resp. opakovať niekoľko behov algoritmu. Uvedomme si, že ak $Q(X) \neq 0$, potom $n + 1$ behov s *rôznymi* hodnotami r to musí potvrdiť.

"ponaučenie"

Zhrnutím dostávame, že test na rovnosť polynómov $P_1(X) \stackrel{?}{=} P_2(X)$ je rozumné transformovať na test $P_1(X) - P_2(X) \stackrel{?}{=} 0$

Pri prechode k polynómom viacerých premenných využijeme nasledujúcu vetu.

Veta 4.14 (Schwartz-Zippel) *Nech $Q(x_1, \ldots, x_n) \in F[x_1, \ldots, x_n]$ je polynóm viacerých premenných celkového stupňa d. Nech $S \subseteq F$ a $r_1, \ldots, r_n$ sú náhodne vybraté z S. Potom*

$$Pr[Q(r_1, \ldots, r_n) = 0 \mid Q(x_1, \ldots, x_n) \neq 0] \leq \frac{d}{|S|}$$

Dôkaz: Postupujeme indukciou vzhľadom na počet premenných n.

n=1 Polynóm stupňa d má nanajvýš d rôznych koreňov. ✓

n>1 Nech $k \leq d$ je maximálny stupeň exponentu premennej, povedzme že je to x_1. Potom

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{k} x_1^i Q_i(x_2, \ldots, x_n)$$

Vzhľadom na výber vieme, že

- koeficient $Q_k(x_2, \ldots, x_n)$ pri x_1^k nie je nula
- stupeň polynómu $Q_k(x_2, \ldots, x_n)$ je nanajvýš $d - k$
- pravdepodobnosť, že $Q_k(r_2, \ldots, r_n) = 0$ je nanajvýš $\frac{d-k}{|S|}$

Nech teda $Q_k(r_2, \ldots, r_n) \neq 0$. Uvažujme polynóm

$$q(x_1) = Q(x_1, r_2, \ldots, r_n) = \sum_{i=0}^{k} x_1^i Q_i(r_2, \ldots, r_n)$$

Stupeň polynómu $q(x_1)$ je nanajvýš k, nie je identicky rovný 0, preto

$$Pr[q(r_1) = 0 \mid q(x_1) \not\equiv 0] \leq \frac{k}{|S|}$$

Využijúc $Pr[A] \leq Pr[A|\overline{B}] + Pr[B]$ dostávame

$$Pr[Q(r_1, \ldots, r_n) = 0 \mid Q(x_1, \ldots, x_n) \neq 0] \leq \frac{d-k}{|S|} + \frac{k}{|S|} = \frac{d}{|S|}$$

□

Ak počítame $\mod p$, kde p je prvočíslo, chybu môžme odhadnúť pomocou nasledujúcej lemy.

Lema 4.15 *Nech p je prvočíslo, $Q(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ polynóm nad Z_p, $d \in \mathbb{N}$ je maximálny stupeň premenných Potom Q má nanajvýš $n \cdot d \cdot p^{n-1}$ koreňov.*

Dôkaz: Analogicky ako v predchádzajúcom dôkaze-indukcia cez počet premenných.

n=1 Počet koreňov je nanajvýš $d = ndp^{n-1}$

n>1 $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{d} x_1^i Q_i(x_2, \ldots, x_n)$. Ak $Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \equiv 0 \mod p$, tak alebo

(a) $Q_i(\alpha_2, \ldots, \alpha_n) \equiv 0 \mod p$ pre každé i, alebo

(b) $Q_j(\alpha_2, \ldots, \alpha_n) \not\equiv 0 \mod p$, pričom α_1 je koreňom polynómu

$$q(x_1) = Q_0(\alpha_2, \ldots, \alpha_n) + x_1 Q_1(\alpha_2, \ldots, \alpha_n) + \cdots + x_1^d Q_d(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

(a) Spočítame obe možnosti zvlášť. Keďže $Q(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv 0$, musí existovať taký index k, že polynóm $Q_k(x_2, \ldots, x_n) \not\equiv 0$. Ten má podľa IP nanajvýš $(n-1)dp^{n-2}$ koreňov takých, že $Q_i(\alpha_2, \ldots, \alpha_n) \equiv 0 \mod p$. Keď dovolíme α_1 ľubovoľne, je počet koreňov $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ v prípade (a) nanajvýš $(n-1)dp^{n-1}$.

(b) Polynóm $q(x_1)$ je polynóm jednej premennej stupňa d, preto má nanajvýš d koreňov. V tomto prípade máme teda nanajvýš dp^{n-1} koreňov.

Celkovo teda je koreňov nanajvýš

$$(n-1)dp^{n-1} + dp^{n-1} = ndp^{n-1}$$

□

Algoritmus 30 ľahko upravíme na Monte Carlo algoritmus s jednosmernou chybou, ktorý rieši porovnanie polynómov viacerých premenných.

Algoritmus 31 AQP

Polynómy P_1, P_2 n premenných nad Z_p, maximálny stupeň jednotlivých premenných d, prvočíslo p

1: náhodne vyber $\alpha \in \{0,1\}^n$
2: $h_\alpha(P_1) \leftarrow P_1(\alpha) \mod p$
3: $h_\alpha(P_2) \leftarrow P_2(\alpha) \mod p$
4: **if** $h_\alpha(P_1) = h_\alpha(P_2)$ **then** return "$P_1 \equiv P_2$"
5: **else** return "$P_1 \not\equiv P_2$"

Pravdepodobnosť, že v prípade $Q() = P_1() - P_2() \not\equiv 0$ zvolíme náhodne α tak, že $Q(\alpha) \not\equiv 0$, je aspoň $\left(1 - \frac{nd}{p}pn\right)$.

Uvedený algoritmus môžme využiť na pravdepodobnostné zodpovedanie otázky, či má daný bipartitný graf $G(U,V,E), E \subseteq U \times V$ úplné párovanie (perfect matching)[1].

úplné párovanie

Úplné párovanie je zrejme možné len vtedy, keď $|U| = |V|$. Predpokladáme teda, že $U = \{u_1, \ldots, u_n\}, V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Úplné párovanie je vtedy dané permutáciou π, ktorá hovorí, že v párovaní sú hrany $(u_i, v_{\pi(i)})$. Využijeme Edmondsonovu vetu

Veta 4.16 (Edmondson) *Nech A je matica typu $n \times n$, ktorú k bipartitnému grafu $G(U,V,E)$ skonštruujeme nasledovne*

$$A[i,j] = \begin{cases} x_{ij}, & (u_i, v_j) \in E \\ 0, & (u_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

Definujme polynóm $Q(x_{11}, \ldots, x_{nn}) = det(A)$.[2] Potom G má úplné párovanie práve vtedy ak $Q \not\equiv 0$.

Dôkaz: $det(A) = \sum_{\pi \in S(n)} -1^{sgn(\pi)} A[1,\pi(1)]A[2,\pi(2)] \ldots A[n,\pi(n)]$; tu $S(n)$ je symetrická grupa permutácií a $sgn(\pi)$ je parita počtu výmen, ktorými z identickej permutácie dostaneme permutáciu π. Keďže každé x_{ij} je v matici nanajvýš raz, sumáciou sa nemôžu "vynulovať". Preto determinant nie je identicky rovný 0 práve vtedy, keď existuje permutácia, pre ktorú je príslušný člen nenulový. To je ale ekvivalentné tomu, že

$$\left.\begin{array}{ll} A[1,\pi(1)] \neq 0 \Rightarrow & (1,\pi(1)) \in E \\ A[2,\pi(2)] \neq 0 \Rightarrow & (2,\pi(2)) \in E \\ & \ldots \\ A[n,\pi(n)] \neq 0 \Rightarrow & (n,\pi(n)) \in E \end{array}\right\} \text{úplné párovanie}$$

□

Determinant je polynóm, preto testovanie determinantu je testom polynómu na nulu a na to máme pravdepodobnostný test. Využitie tohto prístupu—súvis párovania a determinantu matice/polynómu—je skôr v konštrukcii paralelného algoritmu na hľadanie úplného párovania.

[1] Párovanie je taká množina hrán, v ktorej je každý vrchol obsiahnutý nanajvýš raz. Párovanie je úplné, ak je v ňom každý vrchol obsiahnutý práve raz.

[2] $det(A)$ označuje determinant matice A.

4.2.3 Porovnávanie reťazcov

Venujme sa teraz problému porovnávania/vyhľadávania textov (pattern matching).

vstup: $X = x_1 \dots x_n \; x_i \in \Sigma$
$Y = y_1 \dots y_m \;\; y_j \in \Sigma$
výstup k pozícia výskytu Y v X: $x_k \dots x_{k+m-1} = Y$
$k = n - m + 2$ znamená, že Y sa v X nevyskytuje

"Klasické" deterministické prístupy sú dva

1. $O(n \cdot m)$ "brute force" algoritmus založený na prikladaní Y postupne na pozície $1, 2$ až $n - m + 1$
2. $O(n + m)$ algoritmus využívajúci predspracovanie Y

Predspracovanie vzorky zadanej reťazcom znakov

vsuvka - predspracovanie vzorky

Predstavme si, že priložíme vzorku k textu tak, že začína na pozícii p. Nech sa zhoduje s textom na prefixe dĺžky i. Ak sa nasledujúci $(i+1)$-ý symbol vzorky líši od odpovedajúceho symbolu textu, musíme vzorku v texte posunúť. Vieme povedať, o koľko symbolov? Položme túto otázku inak – koľko už prečítaných symbolov textu môžme považovať za začiatok vzorky? Predpokladajme, že odpoveďou na túto otázku je hodnota funkcie f:
Pre fixovanú vzorku $b_1 b_2 \dots b_m$ nech $\mathbf{f(i)}$ je maximálna dĺžka *vlastného* sufixu reťazca $b_1 b_2 \dots b_m$, ktorý sa rovná prefixu tohto reťazca

$$f(i) = \max\{j \mid b_1 b_2 \dots b_j = b_{i-j+1} \dots b_i\}$$

$$\begin{array}{l} a_1 a_2 \;\; \dots \; a_p a_{p+1} \dots \; a_{p+i-1} \dots a_n \\ \qquad\quad b_1 b_2 \quad \dots \; b_i \\ \qquad\qquad\quad b_1 \; \dots \; b_{f(i)} \end{array}$$

Predstavme si, že pri čítaní textu postupne zľava doprava máme v premennej i index pozície čítaného symbolu a premenná *dlzka* obsahuje maximálnu dĺžku sufixu doteraz prečítanej časti textu, ktorú môžme považovať za začiatok vzorky. Vedeli by sme definovať funkciu *update*, ktorá by na základe i (resp. a_i) a *dlzka* vypočítala novú hodnotu *dlzka* tak, aby odpovedala prečítaniu symbola a_i zo vstupu?

Ak by sme poznali funkciu f, tak pomerne ľahko. Ak sa posledných *dlzka* symbolov prečítaného textu rovná $b_1 \dots b_{dlzka}$ a ak prečítaný symbol je $b_{dlzka+1}$, tak novou hodnotou *dlzka* bude $dlzka + 1$. Inak je nová hodnota *dlzka* určená na základe toho, ako by bola zmenená, keby jej hodnota bola $f(dlzka)$.

Algoritmus 32 Výpočet *update* pri znalosti chybovej funkcie f

1: $update(x, 0) \leftarrow 0$ pre $x \neq b_1$
2: $update(b_1, 0) \leftarrow 1$
3: **for** dlzka := 1 to m **do**
4: $\quad update(b_{dlzka+1}, dlzka) \leftarrow dlzka + 1$
5: $\quad update(b, dlzka) \leftarrow update(b, f(dlzka))$ pre $b \neq b_{dlzka+1}$

Osatáva vypočítať chybovú funkciu f. Pri jej výpočte si treba uvedomiť, že ak $f(i + 1) = s$, potom platí

$$b_1 b_2 \dots b_s = b_{i-s+2} \dots b_{i+1} \qquad \text{ale aj} \qquad b_1 b_2 \dots b_{s-1} = b_{i-s+2} \dots b_i$$

Algoritmus 33 Výpočet chybovej funkcie f

```
1: f(1) ← 0
2: for i:=2 to m do
3:     l ← f(i − 1)
4:     while (b_{l+1} ≠ b_i) ∧ (l > 0) do l ← f(l)
5:     if (b_{l+1} ≠ b_i) ∧ (l = 0) then f(i) ← 0
6:     elsef(i) := l + 1
```

Preto $\mathbf{s \leq f(i) + 1}$

Korektnosť riešenia je zrejmá z predchádzajúcej diskusie. **Zložitosť** získame na základe analýzy zložitosti algoritmov 32 a 33.

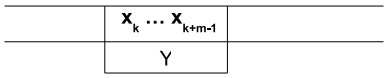
- zložitosť výpočtu tabuľky hodnôt $f(n)$ súvisí s počtom modifikácií globálnej premennej l. Keďže táto štartuje s počiatočnou hodnotou 0 a v priebehu výpočtu je buď zmenšovaná (príkazom $l \leftarrow f(l)$ v riadku 4) alebo zvýšená o 1 nanajvýš raz v cykle pre i(v riadku 6), je zložitosť výpočtu chybovej funkcie $O(m)$.
- zložitosťou výpočtu tabuľky pre funkciu *update* je úmerná veľkosti "tabuľky", ktorou je *update* zadaná, a preto je $O(m)$.
- Zložitosť samotného výpočtu je zrejme $O(n)$.

Fakt 4.17 *Celková zložitosť algoritmu vyhľadávania vzorky v texte s chybovou funkciou je* $\mathbf{O(m+n)}$.

---

vzorka pomocou odtlačkov

Metódu odtlačkov vieme využiť v (asymptoticky) neefektívnejšej verzii deterministického algoritmu– vzorku Y budeme postupne prikladať na jednotlivé pozície v X, porovnanie príslušných podreťazcov však spravíme cez ich odtlačky získané funkciou O_p. Opäť využijeme počítanie modulo prvočíslo p.



$$x_k \ldots x_{k+m-1} \stackrel{?}{=} Y \quad \Longrightarrow \quad O_p(x_k \ldots x_{k+m-1}) \stackrel{?}{=} O_p(Y)$$

Pre jednoduchosť predpokladáme, že $\Sigma = \{0, 1\}$. Potom reťazec dĺžky m môžme vnímať ako binárny zápis čísla a jeho odtlačkom bude zvyšok po delení prvočíslom p. Nech $X(j)$ označuje *číslo*, ktorého binárny zápis je podreťazec dĺžky m reťazca X, ktorý začína na pozícii j; analogicky Y.

Vezmime prvočíslo $p \leq \tau$ náhodne, $O_p(X) = X \mod p$. Ak by sme rovnosť odtlačkov považovali za definitívne určenie pozície, na ktorej sa Y v X nachádza, chyba algoritmu by bola

$$\sum_{j=1}^{n-m+1} Pr[O_p(Y) = O_p(X(j))$$

Keďže pre binárne číslo dĺžky m máme nanajvýš $m-1$ "zlých" prvočísel, môžme písať

$$\sum_{j=1}^{n-m+1} Pr[O_p(Y) = O_p(X(j)) \mid Y \neq X(j)] < \frac{nm}{Prim(\tau)} = O\left(\frac{nm \log \tau}{\tau}\right)$$

To pri voľbe $\tau = f(n,m) = n^2 m \log n^2 m$ dáva pravdepodobnosť chyby MC algoritmu s jednosmernou chybou

$$\frac{nm\log(n^2 m \log n^2 m)}{n^2 m \log n^2 m} \leq \frac{\log(n^2 m)^2}{\log n^2 mn} = \frac{2\log n^2 m}{n \log n^2 m} = \frac{2}{n}$$

resp. $O(1/n)$.

Algoritmus 34 String(f(n,m))

▷ f určuje veľkosť použitých prvočísel

1: náhodne vyber $p \in Prim(f(n,m))$
2: $O_p(Y) \leftarrow Y \mod p$
3: $O_p(X(0)) \leftarrow Num(x_1 \ldots x_{m-1}) \mod p$
4: $k \leftarrow 1$
5: **while** k<n-m+1 **do**
6: $O_p(X(k)) \leftarrow (2[O_p(X(k-1)) - x_{k-1}2^{m-1} \mod p] + x_{k+m-1}) \mod p$
▷ $O_p(X) \leftarrow X(k) \mod p$; $x_0 = 0$
7: **if** $O_p(Y) = O_p(X(k))$ **then**
8: **if** $Y = X(k)$ **then** return "Y sa vyskytuje od pozície k"
▷ z pravdepodobnostného algoritmu robíme deterministický
9: **else** $k \leftarrow k+1$
10: return "Y sa v X nevyskytuje"

Ak však rovnosť odtlačkov použijeme len ako indikáciu *potenciálneho* výskytu Y v X a skutočnosť overíme "priložením" Y na príslušnú pozíciu, dostaneme algoritmus Las Vegas, ktorého každá odpoveď je korektná. V tomto prípade má zmysel sa pýtať, aká je jeho očakávaná časová zložitosť.

Pri realizácii algoritmu využívame efektívne počítanie $X(j) \mod p$, ktoré vychádza z rovnosti

$$X(j+1) = 2[X(j) - 2^{m-1}x_j] + x_{j+m}$$

Analyzujme Las Vegas verziu (Algoritmus 34). Očakávaná zložitosť je *čas*

$$O\left(\underbrace{(n+m)\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{\text{žiaden potenciálny výskyt}} + \underbrace{mn\left(\frac{1}{n}\right)}_{\text{overovanie na každej pozícii}}\right) = O(n+m)$$

Upravme algoritmus tak, že po falošnej zhode vygenerujeme prvočíslo p náhodne. Potom pravdepodobnosť toho, že spravíme viac ako t reštartov, je nanajvýš $\frac{1}{n^t}$. *modifikácia Las Vegas*

4.2.4 Interaktívne dôkazy

Poslednou (našou) aplikáciou metódy odtlačkov sú tzv. *interaktívne dôkazy.* Predpokladajme, že niekto tvrdí, že pozná dôkaz. Našou úlohou je sa presvečiť, že ho pozná bez toho, aby nám ho celý ukázal. Môžme vidieť iba "odtlačok" tohto dôkazu, pričom odtlačkom sú odpovede na otázky, ktoré budeme klásť. Kvalita dôkazov, ktoré takýmto spôsobom dokážeme overiť, zrejme závisí od kvantity odpovedí a kvality otázok. Ukážeme jeden "vzorový" príklad—problém izomorfizmu a neizomorfizmu grafov.[3]

[3] Grafy $G_1 = (V, E_1)$, $G_2 = (V, E_2)$ sú izomorfné, ak existuje permutácia π taká, že $(i,j) \in E_1 \Leftrightarrow (\pi(i), \pi(j)) \in E_2$

Problém izomorfizmu grafov(GI): dvojicu vstupných grafov (G_1, G_2) akceptujeme, ak sú izomorfné. Ľahko vidno, že tento problém patrí do NP: uhádneme izomorfizmus τ a overíme rovnosť $\tau(G_1) = G_2$.

Problém neizomorfizmu grafov(GNI) dvojicu vstupných grafov (G_1, G_2) akceptujeme, ak nie sú izomorfné. Tento problém je z $co - NP$. Nemáme krátke dôkazy, asi je to ťažšie....

Na dokazovanie použijeme systém dvoch hráčov/algoritmov.

V-verifier je pravdepodobnostný polynomiálny algoritmus, ktorý sa snaží overiť, že grafy G_1, G_2 nie sú izomorfné. Môže pritom klásť otázky dôkazu P

P-proover je algoritmus, ktorému neohraničujeme výpočtovú silu. Zakážeme mu jediné a to prístup k náhodným bitom algoritmu V

výpočet je komunikácia medzi nimi, pričom posledné slovo má V. Vyžadujeme

- ak G_1, G_2 sú neizomorfné, potom P má šancu presvedčiť V
- ak G_1, G_2 sú izomorfné, potom akákoľvek snaha P vedie k akceptovaniu s pravdepodobnosťou nanajvýš $1/2$

Takémuto algoritmu hovoríme interaktívny dôkaz. Komunikačný protokol (IP) pre V a P pre problém GNI je jednoduchý.

V pracuje takto

- uhádne $i \in \{1, 2\}$ a permutáciu τ
- vypočíta $H = \tau(G_i)$
- pošle H do P a spýta sa na index i

P pošle V index j

V porovná si indexy i, j. Ak $i = j$, akceptuje, že G_1, G_2 sú neizomorfné; inak zamieta

Veta 4.18 *Ak G_1, G_2 nie sú izomorfné, čestný P presvedčí V. Inak je pravdepodobnosť toho, že (hoci aj nečestný) P presvedčí V, nanajvýš 1/2.*

Dôkaz: Analyzujeme podľa reálnej situácie

$G_1 \not\sim G_2$ Ak grafy nie sú izomorfné, výpočtovo neohraničene silný P dokáže nájsť aj korektný index i aj permutáciu τ, ktorou vzniklo $H = \tau(G_i)$. V tomto prípade V odpovedá korektne.

$G_1 \sim G_2$ Ak sú grafy izomorfné, potom $G_1 \sim H \sim G_2$. Akokoľvek silný P bez prístupu k náhodným bitom V nedokáže zistiť index, ktorý po ňom V chce. P si preto tipne, čo vedie k pravdepodobnosti chyby nanajvýš $1/2$. □

Len pre zaujímavosť. Označme IP vyššie popísaný systém (V, P). Dá sa (nie celkom jednoducho) ukázať, že IP=PSPACE.

4.3 Zvyšovanie úspešnosti opakovaním a náhodná vzorka

Tieto dve metódy sú natoľko podobné, že niekedy ťažko rozlíšiť, o ktorú z nich ide. Navyše, ich vhodná kombinácia dáva dobré výsledky.

opakovanie

Doteraz sme nezávislé opakovanie celých výpočtov využívali k znižovaniu chyby pod želanú hranicu. Metódu teraz potiahneme ďalej

- opakovanie nie celých výpočtov, ale len vybraných častí
- opakovanie rôznych častí výpočtu rôzny počet krát: častejšie zopakujeme tie časti, v ktorých je pravdepodobnosť výskytu chyby vyššia

náhodná vzorka

Pri hľadaní objektu danej vlastnosti postupujeme tak, že náhodne vyberáme kandidátske objekty. Ak je pravdepodobnosť, že objektov s danou vlatnosťo je dosť, veľká, poskytuje táto metóda "rozumné" riešenie pre viaceré problémy, pre ktoré rozumné/efektívne deterministické algoritmy nepoznáme

4.3.1 Zlepšovanie úspešnosti opakovaním kritických častí

Vplyv premysleného opakovania pravdepodobnostného algoritmu na čas a kvalitu získaného algoritmu budeme prezentovať na probléme minimálneho rezu - Min-Cut:

vstup: multigraf[4] $G = (V, E, c)$ $c : E \to \mathbb{N} - \{0\}$ určuje násobnosť hrán
Prípustné riešenia: $M(G) = \{(V_1, V_2) \mid V_1 \cup V_2 = V,\ V_1 \cap V_2 = \emptyset\}$
je to množina hranových rezov
cena: $cost((V_1, V_2), G) = \sum_{\ell \in S(V_1,V_2)} c(\ell)$
$S(V_1, V_2) = \{(x, y) \in E \mid x \in V_1, y \in V_2\}$
cieľ: minimalizácia ceny

Najlepší známy deterministický algoritmus je zložitosti $O(|V| \cdot |E| \cdot \log \frac{|V|^2}{|E|})$, čo je v najhoršom prípade $O(n^3)$.

kontrakcia hrán

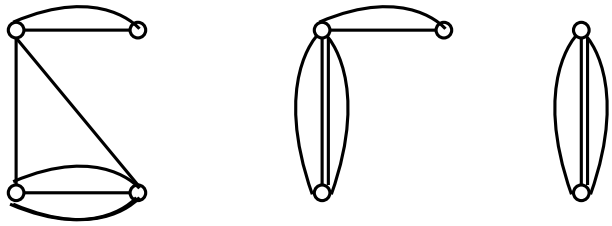
Pravdepodobnostný algoritmus je založený na *kontrakcii hrán*. Neformálne je kontrakcia hrany vlastne realizáciou rozhodnutia, že dva susediace (pseudovrcholy)vrcholy x, y budú v budúcnosti *oba* patriť do rovnakej časti rozkladu vrcholov V_1 alebo V_2. Dôsledky tohto rozhodnutia sa prejavia úpravou grafu: hranu nahradí (pseudo)vrchol a hrany pôvodne smerujúce do x, resp. y budú smerovať do tohto vzniknutého pseudovrchola.
Nech (x, y) je hrana; jej kontrakciou rozumieme

contract(G,(x,y)):

- zlúčenie vrcholov x, y do jedného vrchola: formálne vznikne vrchol $x \cup y$
- odstránenie vrcholov x, y a ich nahradenie pseudovrcholom $x \cup y$; $V \leftarrow V - \{x, y\} + x \cup y$
- odstránenie hrany (x, y) a hrán smerujúcich do jedného z vrcholov x, y a ich presmerovanie do vrchola $x \cup y$:

$$E \leftarrow E - \{(u, v) \in E \mid u \in \{x, y\}, v \in V\} + \{(u, x \cup y) \mid (u, x) \in E \vee (u, y) \in E\}$$

Takto vzniknutý graf označíme $G/(x, y)$. Nech $F = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)\} \subseteq E^+$. Graf, ktorý vznikne postupným kontrahovaním hrán $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$ označíme G/F. Všimnime si, že na poradí odstraňovania hrán nezáleží.



Algoritmus na výpočet minimálneho rezu je jednoduchý - náhodne zvolíme hranu, spravíme kontrakciu a opakujeme, kým graf neobsahuje dva (pseudo)vrcholy. Ako výsledok vezmeme množinu hrán medzi týmito vrcholmi (Algoritmus 35)

Algoritmus 35 Contraction

1: $label(v) \leftarrow v$
2: **while** G má viac ako 2 vrcholy **do**
3: náhodne vyber hranu $e = (x, y) \in E(G)$
4: $G \leftarrow contract(G, e)$
5: $label(z) \leftarrow label(x) \cup label(y)$, kde z je kontrakciou novovzniknutý vrchol
6: nech $G = (\{u, v\}, E(G))$: return$((label(u), label(v)), |E(G)|)$

Veta 4.19 *Algoritmus 35 je polytime pravdepodobnostný algoritmus, ktorý optimálne rieši problém Min-Cut s pravdepodobnosťou aspoň* $\frac{2}{n(n-1)}$*, kde* n *je počet vrcholov vstupného grafu* G*.*

Dôkaz: Začneme analýzou časovej zložitosti algoritmu 35.

čas

- *jedna kontrakcia* je úmerná prezretiu hrán prislúchajúcich k dvom vrcholom; keďže násobné hrany reprezentujeme pomocou funkcie c, stojí nás táto úprava čas $O(n)$
- *počet opakovaní* kontrahovania hrán je daný počtom vrcholov pôvodného grafu - s kontrakciami skončíme, keď kontrahovaný graf má 2 vrcholy. Počet iterácií je teda $n - 2$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{O(n\cdot(n-2))=O(n^2)}$$

korektnosť

Analýzu úspešnosti/chyby spravíme spočítaním pravdepodobnosti, že hrany z *fixovaného* minimálneho rezu C_{min} ostanú neskontrahované. Uvedomme si, že sústredenie sa na jeden konkrétny minimálny rez pravdepodobnosť chyby neznižuje. Nech $cost(C_{min}) = k$. Pri argumentácii využijeme nasledujúce-zjavné-fakty

- Keďže každá hrana má dva konce, počet hrán v grafe je rovný polovici súčtu stupňov jednotlivých vrcholov.
- Ak k je cena minimálneho hranového rezu, potom každý vrchol v G má stupeň aspoň k. Preto je počet hrán v grafe aspoň $\frac{nk}{2}$
- Algoritmus 35 počíta $C_{min} \iff$ žiadna hrana z $E(C_{min})$ nebola kontrahovaná

Označme

$$\mathbf{E_i} = \{\text{výpočty, ktoré v i-tej iterácii nevybrali na kontrakciu hranu z } E(C_{min})\}$$

Zaujíma nás pravdepodobnosť udalosti $\bigcap_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n-2}} \mathbf{E_i}$

$$Pr\left[\bigcap_{i=1}^{n-2} E_i\right] = Pr\left[E_1\right] \cdot Pr\left[E_2|E_1\right] \cdot Pr\left[E_3|E_1 \cap E_2\right] \cdots Pr\left[E_{n-2}|\bigcap_{i=1}^{n-3} E_i\right]$$

Postupne:

$$Pr\left[E_1\right] = \frac{|E| - |E(C_{min})|}{|E|} = 1 - \frac{k}{|E|} \geq 1 - \frac{k}{\frac{kn}{2}} = 1 - \frac{2}{n}$$

Po $i-1$ iteráciách—náhodných kontrakciách—máme $(n-i+1)$ vrcholov, pričom každý z nich stále musí mať stupeň aspoň k. Ostalo nám teda aspoň $\frac{k(n-i+1)}{2}$ hrán, z ktorých vyberáme, pričom $|E(C_{min})|$ z nich je "zlých"

$$\mathbf{Pr}\left[\mathbf{E_i} \middle| \bigcap_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{i-1}} \mathbf{E_j}\right] \geq \frac{|E(G/F_i) - E(C_{min})|}{|E(G/F_i))|} \geq 1 - \frac{k}{|E(G/F_i)|} \geq 1 - \frac{k}{\frac{k(n-i+1)}{2}} = \mathbf{1 - \frac{2}{n-i+1}}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Pr}\left[\bigcap_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n-2}} \mathbf{E_j}\right] &\geq \prod_{i=1}^{n-2}\left(\mathbf{1 - \frac{2}{n-i+1}}\right) = \prod_{\ell=n}^{3} \frac{\ell-2}{\ell} \\ &= \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \cdots \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{n(n-1)} = \mathbf{\frac{1}{\binom{n}{2}}} \end{aligned}$$

□

Máme teda v $O(n^2)$ garantovanú úspešnosť $\frac{2}{n(n-1)} > \frac{2}{n^2}$, resp. pravdepodobnosť chyby nanajvýš $1 - \frac{2}{n^2}$. To znamená, že ak zopakujeme $n^2/2$ nezávislých behov tohto algoritmu a ako výsledok vezmeme najlepšie z riešení, chyba bude s pravdepodobnosťou nanajvýš[5]

$$\left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^{n^2/2} < \frac{1}{e}$$

Lenže čas je $O(n^4)$....

Uvedený prístup je "naivný" v tom, že sme opakovali celé výpočty. Vidíme pritom, že pravdepodobnosť chyby so zväčšujúcim sa počtom iterácií rastie, kedže počet hrán, z ktorých vyberáme, klesá. Zdá sa preto rozumné proces kontrahovania pri vhodnej veľkosti ukončiť a minimálny rez dopočítať (deterministicky) presne. Zamyslime sa nad tým, dokedy má zmysel robiť kontrakciu, kedy je už graf dostatočne malý. Uvažujme funkciu $\ell(n)$, ktorá určuje ukončenie procesu kontrakcie—počet vrcholov grafu, pri ktorom zvyšok dopočítame deterministicky. Vyžadujeme, aby $1 < \ell(n) < n$, ℓ bola monotónna

Algoritmus 36 DetRan(ℓ)

1: aplikuj Algoritmus Contraction(35) na G dovtedy, kým nemá $\ell(n)$ vrcholov; výsledkom je graf G/F
2: aplikuj na G/F s $\ell(n)$ vrcholmi najlepší deterministický algoritmus D
3: return $(\mathsf{D}(G/F))$

Analyzujme časovú zložitosť Algoritmu 36. *čas*

$$\left.\begin{array}{ll} O((n-\ell(n)) \cdot n) = O(n^2), & \text{príspevok Algoritmu 35} \\ O((\ell(n))^3), & \text{príspevok algoritmu } \mathsf{D} \end{array}\right\} O(n^2 + (\ell(n))^3)$$

Chyba Algoritmu 36 závisí len od prvej časti, v ktorej realizujeme kontrakcie, potom už je algoritmus deterministický. *úspešnosť*

[5] $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$$\begin{aligned}\mathbf{Pr}\left[\bigcap_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n-\ell(n)}} \mathbf{E_i}\right] &\geq \prod_{i=1}^{n-\ell(n)}\left(1-\tfrac{2}{n-i+1}\right) = \\ &= \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n-2}\left(1-\frac{2}{n-i+1}\right)}{\displaystyle\prod_{j=n-\ell(n)+1}^{n-2}\left(1-\frac{2}{n-j+1}\right)} = \frac{\frac{1}{\binom{n}{2}}}{\frac{1}{\binom{\ell(n)}{2}}} = \frac{\binom{\ell(\mathbf{n})}{\mathbf{2}}}{\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{2}}}\end{aligned}$$

Dokázali sme nasledujúce tvrdenie

Lema 4.20 *Ak $1 < \ell(n) < n$ je monotónna funkcia, tak Algoritmus DetRan 36 je polynomiálny pravdepodobnostný algoritmus, ktorý nájde minimálny rez s pravdepodobnosťou aspoň* $\frac{\binom{\ell(n)}{2}}{\binom{n}{2}}$

voľba $\ell(n)$

Ostáva vhodne zvoliť $\ell(n)$. Podľa predchádzajúcej lemy 4.20 je pravdepodobnosť úspechu algoritmu DetRan aspoň

$$\frac{\binom{\ell(n)}{2}}{\binom{n}{2}} \leq \frac{\ell^2(n)}{n^2}$$

Ak teda spravíme $\frac{n^2}{\ell^2(n)}$ nezávislých opakovaní algoritmu DetRan(ℓ), dosiahneme v čase

čas

$$O\left((n^2+\ell^3(n))\cdot\frac{n^2}{\ell^2(n)}\right) = O\left(\frac{n^4}{\ell^2(n)} + n^2\ell(n)\right)$$

pravdepodobnosť *úspechu* aspoň

úspešnosť

$$1-\left(1-\frac{\binom{\ell(n)}{2}}{\binom{n}{2}}\right)^{\frac{n^2}{\ell^2(n)}} \geq 1-\left(1-\frac{\ell^2(n)}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{\ell^2(n)}} = 1-\frac{1}{e}$$

Z hľadiska časovej zložitosti je najlepšia voľba pre funkciu $\ell(n)$ taká, keď

$$\frac{n^4}{\ell^2(n)} = n^2\ell(n) \quad\Longrightarrow\quad \ell(n) = \left\lfloor n^{2/3}\right\rfloor$$

Zhrnutím týchto úvah máme

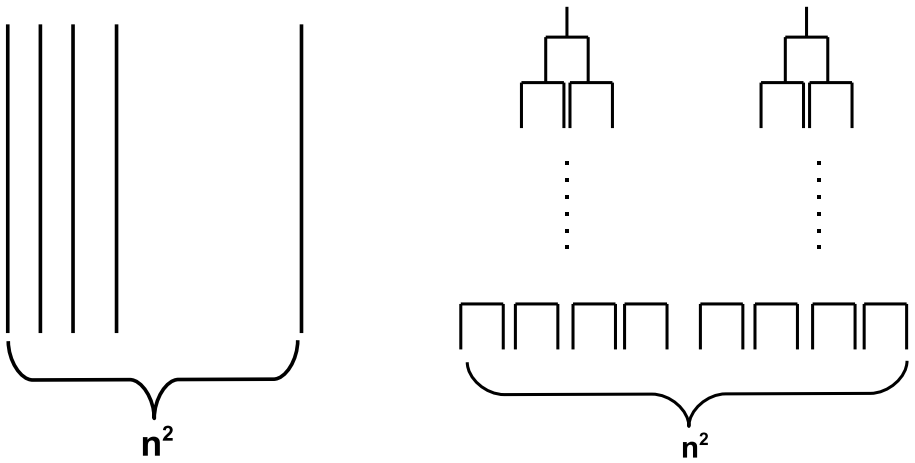
Veta 4.21 *Algoritmus Detran($n^{2/3}$) opakovaný $\frac{n^2}{\ell^2(n)} = n^{4/3}$ krát vypočíta v čase $O\left(\frac{n^4}{\ell^2(n)}\right) = O(n^{8/3})$ minimálny rez s pravdepodobnosťou úspechu aspoň $1-\frac{1}{e}$.*

Získaný algoritmus[6] je lepší ako najlepší známy deterministický. Skúsme vytvoriť ešte lepší algoritmus.

Vráťme sa k základnému algoritmu 35 a všimnime si, ako sa pri postupnosti kontrakcií pravdepodobnosť chyby mení.

$$\frac{2}{n}, \frac{2}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \ldots, \frac{2}{3}$$

Pravdepodobnosť chyby v priebehu opakovania kontrakcií rastie, preto budeme algoritmus častejšie opakovať ku koncu. Predstavme si, že jednotlivé opakované behy Algoritmu 35 robíme paralelne (obr. 4.1 vľavo). Vtedy si čas možno predstaviť ako plochu. Ak by sme behy vytvárali postupne (obr. 4.1 vpravo)—začneme s dvomi, po nejakom čase výpočtu každý proces pri náhodnej voľbe rozdelíme na dva,..., bude



Obrázok 4.1: Opakovania Algoritmu Contract: vľavo n^2 kompletných behov, vpravo $O(n^2)$ behov, ktoré vznikajú postupným "delením"

čas odpovedať súčtu dĺžok ciest z koreňa do listov. Aj "opticky" to vyzerá lepšie. Ukážeme, že pri vhodnej voľbe deliacich bodov tomu tak naozaj je.
Počet behov zdvojnásobíme, keď sa počet vrcholov kontrakciami zredukoval na $1/\sqrt{2}$-tinu. Keďže počet kontrakcií je $n-2$, je počet behov, ktoré realizujeme, $2^{\log_{\sqrt{2}} n-2} = O(n^2)$.

Algoritmus 37 RepTree(G)

1: ak $n \leq 6$ vypočítaj minimálny rez deterministicky
2: $h \leftarrow \left\lceil 1 + \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rceil$
3: realizuj paralelne výpočet na dvoch behoch dovtedy, kým kontrakciami nevzniknú grafy G/F_1, G/F_2 veľkosti h
4: RepTree(G/F_1)
5: RepTree(G/F_2)
6: return lepší minimálny rez

Veta 4.22 *Časová zložitosť Algoritmu RepTree je $O(n^2 \log n)$, pravdepodobnosť úspechu aspoň $\frac{1}{\Omega(\log n)}$.*

Dôkaz: Začnime analýzou času. *čas*

- Veľkosť multigrafu klesá o (multiplikatívny) faktor $1/\sqrt{2}$, preto je hĺbka vnorenia rekurzie nanajvýš $\log_{\sqrt{2}} n = O(\log n)$.
- Časová zložitosť Algoritmu Contract, keď štartoval na n vrcholoch, je $O(n^2)$. Prechod od m vrcholov k $\left\lceil 1 + \frac{m}{\sqrt{2}} \right\rceil$ teda môžme zhora ohraničiť $O(m^2)$.
- Časovú zložitosť možno vyjadriť rekurentnou nerovnicou

$$T(n) \leq \begin{cases} O(1), & n \leq 6 \\ 2T(\left\lceil 1 + \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rceil) + O(n^2) & \text{inak} \end{cases}$$

  ktorej riešením je $O(n^2 \log n)$

Pripomeňme si, že máme fixovaný minimálny rez C_{min} s cenou $|E(C_{min})| = k$ *úspešnosť*

[6] Kde je *random sampling*?

- označme p_ℓ pravdepodobnosť toho, že graf G/F_i veľkosti $\left\lceil 1+\frac{n}{\sqrt{2}} \right\rceil$ obsahuje C_{min}, ak ho obsahoval graf G veľkosti ℓ pred rozdelením na $G/F_1,\ G/F_2$.

$$p_\ell \geq \frac{\binom{\left\lceil 1+\frac{\ell}{\sqrt{2}} \right\rceil}{2}}{\binom{\ell}{2}} = \frac{\left\lceil 1+\frac{\ell}{\sqrt{2}} \right\rceil \left(\left\lceil 1+\frac{\ell}{\sqrt{2}} \right\rceil - 1 \right)}{\ell(\ell-1)} \geq \frac{(\sqrt{2}+\ell)\ell}{2\ell(\ell-1)} \geq \frac{1}{2}$$

- označme $Pr(n)$ pravdepodobnosť toho, že algoritmus RepTree nájde minimálny rez C_{min}. Potom $p_\ell Pr\left(\left\lceil 1+\frac{\ell}{\sqrt{2}} \right\rceil\right)$ je dolným odhadom na pravdepodobnosť toho, že z G/F vypočítame C_{min} redukciou na G/F_i, ak G/F ho obsahovalo
- pravdepodobnosť toho, že rekurziou *nevypočítame* C_{min} je nanajvýš

$$\left(1 - p_\ell \left(\left\lceil 1+\frac{\ell}{\sqrt{2}} \right\rceil\right)\right)^2$$

- $Pr(2) = 1$

$$Pr(\ell) \geq 1 - \left(1 - p_\ell \left(\left\lceil 1+\frac{\ell}{\sqrt{2}} \right\rceil\right)\right)^2 \geq 1 - \left(1 - 1/2 \left(\left\lceil 1+\frac{\ell}{\sqrt{2}} \right\rceil\right)\right)^2$$

Teraz ukážeme, že riešením je $\Theta(\frac{1}{\log l})$. Nech $k = \Theta(\log l)$ je hĺbka rekurzie. Potom dolný odhad na pravdepodobnosť úspechu $p(k)$ získame riešenm rekurentnej rovnice

$$p(k) = \begin{cases} 1, & \text{k=0} \\ \\ p(k-1) - \frac{p(k-1)^2}{4}, & k > 0 \end{cases}$$

Označme $q(k) = 4/p(k) - 1$. Potom $p(k) = \frac{4}{q(k)+1}$

$$\begin{array}{rcl} \frac{4}{q(k+1)+1} & = & \frac{4}{q(k)+1} - \left(\frac{4}{q(k)+1}\right)^2 /4 \\ \frac{1}{q(k+1)+1} & = & \frac{q(k)}{(q(k)+1)^2} \end{array}$$

Úpravou dostávame $q(k+1) = q(k) + 1 + \frac{1}{q(k)}$ a následne:

$$\begin{array}{rcl} q(k) & = & q(k+1) + 1 + \frac{1}{q(k-1)} \\ & = & q(k-2) + 1 + \frac{1}{q(k-2)} + 1 + \frac{1}{q(k-1)} \\ & = & q(0) + k + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{q(i)} = {}^{7}3 + k + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{q(i)} \end{array}$$

$$k < q(k) < k + 3 + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i} = k + 3 + H_{k-1}$$

Teda $q(k) = k + \Theta\log k$, $p(k) = \frac{4}{q(k)+1} = \frac{4}{k+\Theta\log k} = \Theta(\frac{1}{k})$ a teda $\boxed{p(l) = \Theta(\frac{1}{\log l})}$

□

Na základe analýzy algoritmu RepTree je jasné, že $\log n$ nezávislých opakovaní tohto algoritmu stačí, aby sme s konštantnou pravdepodobnosťou dosiahli optimálne riešenie problému Min-Cut. Pri $O\log^2 n$ opakovaniach ide pravdepodobnosť neúspechu rýchlo k nule. Pritom čas v tomto prípade je $O(n^2 \log^3 n)$.

4.3.2 Opakovaná náhodná vzorka a 3-splniteľnosť

V tejto časti ukážeme, ako vhodné skombinovanie viacerých metód

- opakovanie
- náhodná vzorka
- lokálne prehľadávanie

vedie k "rozumnému" riešeniu NPÚ problému 3SAT. Doteraz nie je známy polytime pravdepodobnostný algoritmus na riešenie NPÚ problému s ohraničenou chybou, skôr sa predpokladá, že NP-ťažké sú ťažké aj pre polytime pravdepodobnostné. Čo ale môžme dosiahnuť je rozumný exponenciálny čas.

f(n)	10	50	100	300
n!	$\approx 3.6 \cdot 10^6$	65 digits	158 digits	625 digits
2^n	1024	16 digits	31 digits	91 digits
$2^{n/2}$	32	$\approx 33 \cdot 10^6$	16 digits	46 digits
$(1.2)^n$	$\approx$6.19	9100	$\approx 8.2 \cdot 10^7$	24 digits
$10 \cdot 2^{\sqrt{n}}$	$\approx$30	$\approx$1345	10240	$\approx 1.64 \cdot 10^6$
$n^2 \cdot 2^{\sqrt{n}}$	895	≈ 336158	$1.024 \cdot 10^7$	$\approx 1.48 \cdot 10^{11}$
n^6	10^6	$1.54 \cdot 10^{10}$	10^{12}	$\approx 7.29 \cdot 10^{14}$

Smerujeme k 1MC algoritmu pre 3KNF-splniteľnosť, ktorého časová zložitosť bude $O(|F| \cdot n^{3/2} \cdot (\frac{4}{3})^n)$. Základná idea spočíva v niekoľkonásobnom prehľadaní vhodného okolia náhodne vybraného vektora: cieľom je nájsť vektor, ktorý spĺňa vstupnú formulu.

Algoritmus pracuje v kolách, ich počet je určený konštantou S. V jednom kole vygeneruje náhodný vektor hodnôt α. Ak $F(\alpha) \neq 1$, spraví nanajvýš $M = 3n$ náhodných krokov/pokusov v okolí vektora α. Krok spočíva vo vygenerovaní nového testovacieho vektora α, ktorý vznikne flipom jednej z premenných; túto premennú určíme tak, že náhodne zvolíme nesplnenú klauzulu v $F(\alpha)$ a premennú v nej.

Algoritmus 38 Schöning

```
1:  N ← 0                                          ▷ počet prezeraných vzoriek
2:  S ← ⌈20 · √(3πn) (4/3)^n⌉      ▷ odhad počtu v tejto iterácii prezretých vzoriek
3:  Found ← False
4:  while N < S and not Found do
5:      N ← N + 1
6:      náhodne zvoľ α ∈ {0,1}^n
7:      if F(α) = 1 then Found ← True
8:      M ← 0
9:      while M < 3n and not Found do
10:         M ← M + 1
11:         nájdi v F(α) nesplnenú klauzulu C a náhodne zmeň niektorý z bitov
12:         v tejto klauzule, čím vznikne nová hodnota α
13:         if F(α) = 1 then Found ← True
14: if Found = True then return (splniteľná, α)
15: else return (nesplniteľná)
```

Veta 4.23 *Algoritmus Schöning je 1MC pre problém splniteľnosti 3KNF formuly. Jeho časová zložitosť je* $O\left(|F| \cdot n^{3/2} \cdot (4/3)^n\right)$

Dôkaz: Začneme časom.

čas

- pri použití opakovaného umocňovania vypočítame hodnotu S na riadku 2 v čase $O(n^2 \log n)$
- celkovo robíme S krát náhodnú vzorku s lokálnym vyhľadávaním

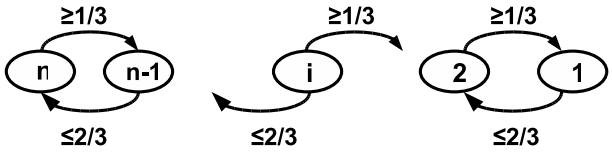
$$O(|F| \cdot \underbrace{n^{1/2} \cdot (4/3)^n}_{S} \cdot \underbrace{n}_{M}) = O(|F| \cdot n^{3/2} \cdot (4/3)^n)$$

korektnosť

Ak vstupná formula nie je splniteľná, algoritmus korektne odpovie, že je nesplniteľná. Chybu môže algoritmus spraviť len vtedy, ak sa mu nepodarí nájsť spĺňajúce priradenie, hoci formula splniteľná je. Spočítame, aká je pravdepodobnosť, že v prípade splniteľnej formuly nájdeme jedno *fixované* priradenie α^*.
Označme

- p pravdepodobnosť toho, že jednou vzorkou a lokálnym prehľadávaním toto priradenie α^* nájdeme(riadky 6-13).
- $Dist(\alpha, \beta)$ - počet bitov, v ktorých sa vektory α, β líšia
- $Class(j) = \{\beta \in \{0,1\}^n \mid Dist(\alpha^*, \beta) = j\}$; zrejme
  $Class(0) = \{\alpha^*\}$
  $|Class(j)| = \binom{n}{j}$

Pozrime sa na lokálne prehľadávanie ako na putovanie medzi jednotlivými triedami (obr.4.2)



Obrázok 4.2: Proces lokálneho prehľadávania možno vnímať ako putovanie po grafe. Cieľom je sa z náhodného vrchola dostať do vrchola 0.

- Pravdepodobnosť toho, že sa z j posunieme v jednom lokálnom kroku/jedným flipom do $(j-1)$ je aspoň $1/3$. Analogicky, presun z j do $(j+1)$ je s pravdepodobnosťou nanajvýš $2/3$.

- Označme $q_{j,i}$ pravdepodobnosť, že keď začneme v triede $Class(j)$, skončíme v α^*, pričom prejdeme *presne* $(j+i)$ krokov smerom ku α^* a i smerom od α^*. Zrejme $i, j \leq n$

- Popis lokálneho prehľadávania možno znázorniť reťazcom $\{+,-\}^{j+2i}$, pričom $j + 2i \leq 3n$, $+$ znázorňuje posun smerom ku α^*, znak - zas posun od α^*. Nie každý takýto reťazec je korektným popisom lokálneho prehľadávania. Ten korektný má v každom suffixe aspoň toľko znakov $+$ ako -. Dá sa ukázať, že takýchto reťazcov je

$$\binom{j+2i-1}{i} - \binom{j+2i-1}{i-1} = \binom{j+2i}{i} \frac{1}{j+2i} \tag{4.1}$$

  Označme množinu týchto reťazcov $\mathcal{B}$.

- každé $w \in \mathcal{B}$ definuje množinu výpočtov $Event(w)$

$$Pr[Event(w)] \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{j+i} \left(\frac{2}{3}\right)^{i}$$

Preto

$$q_{j,i} \geq \underbrace{\frac{1}{j+2i}\binom{j+2i}{i}}_{\#w} \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^{j+i}\left(\frac{2}{3}\right)^{i}}_{\text{že je to podľa w}}$$

- q_j označuje pravdepodobnosť, že sa z $Class(j)$ dostaneme v rámci 3n krokov lokálneho prehľadávania do α^*

$$q_j \geq \sum_{i=0}^{j} q_{j,i} \quad 0 \leq i \leq j \leq n,\ j+2i \leq 3n$$

$q_o = 1$

$$\begin{array}{lll} q_j & \geq & \sum_{i=0}^{j}\left[\frac{1}{j+2i}\binom{j+2i}{i}\left(\frac{1}{3}\right)^{j+i}\left(\frac{2}{3}\right)^{i}\right] \\ & > & j\cdot\frac{1}{3j}\binom{3j}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^{j+i}\left(\frac{2}{3}\right)^{i} = \frac{1}{3}\binom{3j}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^{j+i}\left(\frac{2}{3}\right)^{i} \qquad //i=j \text{ je dolný odhad} \\ & = & \frac{1}{3}\cdot\frac{(3j)!}{j!(2j)!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2j}\left(\frac{2}{3}\right)^{j} \approx \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2\pi 3j}(3j/e)^{3j}}{\sqrt{2\pi j}(j/e)^{j}\sqrt{2\pi 2j}(2j/e)^{2j}}\left(\frac{1}{3}\right)^{2j}\left(\frac{2}{3}\right)^{j} \qquad //r! \approx \sqrt{2\pi r}\left(\frac{r}{e}\right)^{r} \\ & = & \frac{1}{2\sqrt{3\pi j}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{j} \end{array}$$

Na začiatku sme zvolili vektor náhodne, preto pravdepodobnosť p_j, že začneme v $Class(j)$, je

$$p(j) = \frac{\binom{n}{j}}{2^n}$$

A teraz už $p = Pr$[Schöning nájde po max 3n krokoch] $\geq \sum_{j=0}^{n} p_j q_j$

$$p > \sum_{j=0}^{n}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot\binom{n}{j}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3\pi j}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{j}\right]\cdot 1^{n-j} = \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{2\sqrt{3\pi j}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{2}\right)^{n} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2\sqrt{3\pi n}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{1}{2\sqrt{3\pi n}}\left(\frac{3}{4}\right)^{n} = \widetilde{p}$$

Preto pravdepodobnosť chyby po t opakovaniach je nanajvýš

$$(1-\widetilde{p})^t \leq e^{-\widetilde{p}t}$$

Ak teda vezmeme

$$t = S = 20\sqrt{3\pi n}\left(\frac{4}{3}\right)^{n}$$

dostaneme

$$Erorr(F) \leq (1-\widetilde{p})^t \leq e^{-\widetilde{p}t} = e^{-10} < 5\cdot 10^{-5}$$

Ostáva ešte ukázať platnosť (4.1). Nech $W(i,j)$ označuje počet "korektných" reťazcov dĺžky $i+2j$, v ktorých je i núl a $j+i$ jednotiek. Indukciou argumentujeme, že $W(i,j) = \binom{j+2i}{i}\frac{j}{j+2i}$ *pár slov k (4.1)*

Pre $i=0$ je $W(0,j)=1$, pre $n=1,2$ je $i=0$ a pre $n=3$ je alebo $i=j=0$ alebo $i=0, j=3$. ✓ $n \leq 3$

Pre $r+2l < n$ IP platí. Pre $i+2j=n$ rozlíšime situáciu podľa prvého symbolu $n > 3$

$$\text{prvý symbol je } \begin{cases} 1, & W(i,j-1) = \binom{j-1+2i}{i}\frac{j-1}{j-1+2i} \\ 0, & W(i-1,j+1) = \binom{j-1+2i}{i-1}\frac{j+1}{j-1+2i} \end{cases}$$

a dopočítame zvlášť pre $j=1,\ j>1$

□

4.4 Metóda svedkov

Pre použitie metódy svedkov je kľúčovým momentom dostatok svedkov. To úzko súvisí aj s odpoveďou na otázku, či pravdepodobnostné algoritmy môžu byť efektívnejšie ako deterministické. Ak máme efektívny pravdepodobnostný algoritmus založený na metóde svedkov a svedkov vieme efektívne generovať, máme vlastne aj efektívny deterministický algoritmus. Ak sú však svedkovia rozmiestnení náhodne,...

Pár slov na úvod

- Pre použitie metódy svedkov potrebujeme *dostatok svedkov*, čím väčšinou rozumieme to, že pomer kandidátov a svedkov je konštanta.
- Samotné aplikovanie metódy potom spočíva v náhodnom výbere kandidáta a overení, či je alebo nie je tento kandidát svedkom. Ak je v množine kandidátov dostatočne veľa svedkov, je pravdepodobnosť toho, že vybratý kandidát je svedok, dostatočná.

V tejto súvislosti sa budeme venovať prvočíselnosti, a to konkrétne
– testovaniu prvočíselnosti
– generovaniu náhodných prvočísel

Začneme opakovaním znenia [8] niektorých známych viet, ktoré budeme v argumentácii využívať.

Veta 4.24 (Malá Fermátová) $p \in PRIM$, $a \in Z_p^* = \{d \in Z_p | gcd(a,p) = 1\}$. *Potom*

$$a^{(p-1)} \mod p \equiv 1$$

Veta 4.25 (O čínskych zvyškoch, II. verzia) *Nech* $n = p \times q, gcd(p,q) = 1$. *Nech* $\odot_{p,q}, \oplus_{p,q}$ *sú operácie nad* $Z_p \times Z_q$.

$$\begin{aligned}(a_1,a_2) \oplus_{p,q} (b_1,b_2) &= ((a_1 \oplus_{p,q} b_1) \mod p, (a_2 \oplus_{p,q} b_2) \mod q)\\ (a_1,a_2) \odot_{p,q} (b_1,b_2) &= ((a_1 \odot_{p,q} b_1) \mod p, (a_2 \odot_{p,q} b_2) \mod q)\end{aligned}$$

Potom $(Z_n, \oplus \mod p, \odot \mod q)$ *a* $(Z_p \times Z_q, \oplus_{p,q}, \odot_{p,q})$ *sú izomorfné.*

Veta 4.26 (O čínskych zvyškoch, I. verzia) *Nech* $m = m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_k$, *kde* $k \in N - \{0\}, gcd(m_i, m_j) = 1$ *pre* $i \neq j$. *Potom pre každú postupnosť* $r_1 \in Z_{m_1}, \ldots, r_k \in Z_{m_k}$ *existuje* jediné *číslo* $r \in Z_m : r \equiv r_i (\mod m_1)$

Veta 4.27 (Lagrange) *Pre každú podgrupu* $(H, \circ)$ *konečnej grupy* $(A, \circ)$ *platí*

$$|A| = Index_H(A) \cdot |H|$$

Tu
- $H \circ b = \{h \circ b | h \in H\}$
- $Index_H(A) = |\{H \circ b | b \in H\}|$

[8] V tejto prednáške sú vety nástrojom, dôkazy preto vynechávame.

4.5 Relaxácia na úlohu lineárneho programovania

Všeobecná úloha lineárneho programovania je riešiteľná v polynomiálnom čase, zatiaľ čo 0-1, resp. celočíselná úloha LP sú NP-ťažké. Všetky typy týchto úloh majú ohraničenia $A \cdot X = b$, kde X je vektor premenných, matica A a vektor b sú koeficienty ohraničení; úlohou je minimalizovať funkciu $X \cdot c^T$. Uvedené tri typy sa líšia v definičnom obore vektora X. Základná úloha, riešiteľná v polynomiálnom čase, sa rieši nad reálnymi číslami. 0/1-LP sa rieši nad $\{0, 1\}$ a I-LP nad celými číslami, obe verzie sú NP-ťažké.

Významnosť úlohy LP spočíva aj v tom, že mnoho ťažkých optimalizačných úloh sa dá formulovať ako úloha LP. Dokonca aj v prípade, že získame 0/1-LP alebo I-LP, môžme využiť relaxáciu na reálne čísla a vhodným zaokrúhlením môžme získať kvalitné riešenie[9]
Metóda relaxácie na LP teda pozostáva z troch krokov:

Redukcia Vyjadríme vstup X do optimalizačného problému U ako vstup $I(x)$ do 0/1-LP alebo I-LP.

Relaxácia Relaxujeme od podmienok celočíselnosti a vypočítame optimálne riešenie α všeobecnej úlohy LP so vstupom $I(x)$

Riešenie pôvodného problému Použijeme α na výpočet optimálneho riešenia pôvodnej úlohy, resp. dostatočne kvalitného prípustného riešenia.

Pre danú postupnosť reálnych čísel $a_1, \ldots, a_n$ a postupnosť premenných $x_1, \ldots, x_n$ je *lineárna funkcia* f definovaná predpisom

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

Ak b je reálne číslo a f je lineárna funkcia, tak rovnica

$$f(x_1, \ldots, x_n) = b$$

sa nazýva *lineárnou rovnosťou* a nerovnice

$$f(x_1, \ldots, x_n) \leq b, \quad f(x_1, \ldots, x_n) \geq b$$

sa nazývajú *lineárne nerovnosti*. Termínom lineárne ohraničenie označujeme lineárne rovnosti a nerovnosti.

Definícia 4.3 *Vstupom* úlohy lineárneho programovania *je lineárna funkcia (účelová funkcia) a sústava lineárnych ohraničení nad premennými $x_1, \ldots, x_n$. Cieľom je maximalizovať alebo minimalizovať účelovú funkciu pri splnení daných lineárnych ohraničení.* *LP*

V úlohe celočíselného lineárneho programovania *naviac požadujeme, aby premenné nadobúdali len celočíselné hodnoty.* *I-LP*

V úlohe 0/1-lineárneho programovania *nadobúdajú premenné len hodnoty 0 a 1.* *0/1-LP*

Každé riešenie úlohy LP, ktoré spĺňa všetky lineárne ohraničenia, sa nazýva *prípustným riešením* úlohy LP. Prípustné riešenie, ktoré optimalizuje hodnotu účelovej funkcie, sa nazýva *optimálnym riešením* úlohy LP.

Pri riešení úlohy LP sa používajú viaceré algoritmy:

[9] Viac o tomto prístupe v časti o aproximačných algoritmoch.

- simplexový algoritmu, ktorý má síce v najhoršom prípade exponenciálnu zložitosť, v praxi sa však chová veľmi dobre
- elipsoidový algoritmus, ktorý má síce polynomiálnu zložitosť, v praxi je však kvôli vysokým konštantám pomalý
- metódy vnútorných bodov, ktoré sú pre veľké vstupné inštancie rovnako rýchle, resp. aj rýchlejšie, ako simplexový algoritmus

4.5.1 Príklady redukcie

Problém najkratšej cesty

Vstup: orientovaný graf $G = (V, E)$ s ohodnotením hrán w;
vrcholy $s, t \in V$
Cieľ: dĺžka najkratšej $s - t$ cesty

najkratšia cesta ako LP

Zavedieme pre každý vrchol $v \in V$ premennú x_v a formulujeme úlohu LP pre problém najkratšej cesty ako

$$\min x_t$$

pri ohraničeniach

$$x_u \leq x_v + w(u, v) \forall (u, v) \in E, \quad x_s = 0$$

poriadne dorob toky

Problém batohu Každému objektu $i = 1, \ldots, n$ priradíme premennú x_i, pričom hodnota 1 odpovedá situácii, že príslušný objekt je obsiahnutý v riešení. Formulujme úlohu ako úlohu 1/0-LP:

batoh ako 0/1-LP

maximalizovať	$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$
pri ohraničeniach	$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq b$

Minimálne vrcholové pokrytie Zopakujme si: vstupom problému je ohodnotený graf $G = (V, E, c), c : V \to \mathbb{N} - 0$. Cieľom je nájsť vrcholové pokrytie $S \subset V$: $\forall (u, v) \in E[u \in S \vee v \in S]$, ktorého cena $\sum_{v \in S} c(v)$ je minimálna.

MVC ako 0/1-LP

Pri formulácii úlohy ako úlohy LP využijeme reprezentáciu množiny S charakteristickým vektorom $X_S = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$, pričom

$$x_i = 1 \Longleftrightarrow v_i \in S$$

minimalizovať	$\sum_{i=1}^{n} c(v_i) x_i$
pri ohraničeniach	$x_i + x_j \geq 1 \quad (v_i, v_j) \in E$
	$x_i \leq 1, x_i \geq 0$

4.5.2 Vlastnosti úlohy lineáreho programovania

Hovoríme, že úloha je v *štandardnom tvare*, ak všetky lineárne ohraničenia majú tvar *rovností* a hodnoty premenných sú nezáporné: úlohou je minimalizovať

$$X \cdot c^T = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

pri ohraničeniach

$$\begin{array}{ll} A \cdot X = b & \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j, j = 1, \ldots, m \\ x_i \geq 0 & i = 1, \ldots, n \end{array}$$

Hovoríme, že úloha je v *kanonickom tvare*, ak všetky lineárne ohraničenia majú tvar *nerovností* a hodnoty premenných sú nezáporné

$$\begin{array}{ll} A \cdot X \geq b & \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \geq b_j, j = 1, \ldots, m \\ x_i \geq 0 & i = 1, \ldots, n \end{array}$$

Každá úloha sa dá previesť z kanonického do štandardného tvaru a naopak. Pri prechode od kanonického tvaru je základom nahradenie nerovností rovnosťami za použitia dodatočnej premennej[10].

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \geq b_j \quad \rightsquigarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i - s_j = b_j,\ s_j \geq 0$$

Príklad 4.4 *Uvažujme úlohu LP*

$$\begin{array}{lrcl} \textit{minimalizovať} & 7x_1 + x_2 + 5x_3 & & \\ \textit{pri ohraničeniach} & x_1 - x_2 + 3x_3 & \geq & 10 \\ & 5x_1 + 2x_2 - x_3 & \geq & 6 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Označme z^* minimálnu hodnotu účelovej funkcie. Čo vieme povedať o hodnote z^*?

horný odhad na z^*

Keďže máme minimalizačnú úlohu, každé prípustné riešenie poskytuje horný odhad. Ak máme nejakú hodnotu α a chceme vedieť, či $z^* \leq \alpha$, tak existencia vhodného prípustného riešenia je certifikátom, ktorý potvrdzuje kladnú odpoveď. [11]

Dolný odhad na optimálnu hodnotu účelovej funkcie z^* môžme získať z lineárnych nerovností. Keďže hodnoty premenných sú nezáporné, možme na základe porovnania koeficientov pri jednotlivých premenných písať

$7x_1 + x_2 + 5x_3 \geq x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 10$, resp.
$7x_1 + x_2 + 5x_3 \geq (5x_1 + 2x_2 - x_3) + (x_1 - x_2 + 3x_3) \geq 16$

Všeobecným "návodom" na hľadanie dolného odhadu hodnoty účelovej funkcie je brať nezáporné násobky jednotlivých nerovností tak, aby koeficienty jednotlivých premenných v získanom súčte neprevyšovali odpovedajúce koeficienty v účelovej funkcii. Súčet pravých strán je potom dolným odhadom. Snažíme sa pritom, aby získaný dolný odhad bol čo najvyšší. Dostali sme sa tak k maximalizačnej úlohe LP:

$$\begin{array}{lrcl} \text{maximalizovať} & 10y_1 + 6y_2 & & \\ \text{pri ohraničeniach} & y_1 + 5y_2 & \leq & 7 \\ & -y_1 + 2y_2 & \leq & 1 \\ & 3y_1 - y_2 & \leq & 5 \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

primárna a duálna úloha LP

Pôvodnú úlohu voláme *primárnou úlohou* LP, novoskonštruovanú úlohu nazývame *duálnou úlohou* LP. Analogicky môžme postupovať, keď pôvodná úloha je maximalizačná. Vyskúšajte si.

Formálnejšie:

[10] surplus
[11] nájdite certifikát pre potvrdenie hypotézy, že $z^* \leq 30$ v príklade 4.4

Primárna		
minimalizovať	$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	
pri ohraničeniach	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$	$i = 1, \ldots, m$
	$x_j \geq 0$	$j = 1, \ldots, n$

Duálna		
maximalizovať	$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$	
pri ohraničeniach	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j$	$j = 1, \ldots, n$
$y_i \geq 0$	$i = 1, \ldots, m$	

O vzťahu primánej a duálnej úlohy hovorí nasledovná veta.

Veta 4.28 (Slabá veta o dualite) *Ak* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *a* $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ *sú prípustné riešenia primárnej a duálnej úlohy, tak*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Dôkaz: Dôkaz je veľmi jednoduchý. Keďže $\mathbf{y}$ je prípustným riešením a hodnoty x_j sú nezáporné, môžme využiť ohraničenia pre c_j z duálnej úlohy

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j$$

Podobne pre prípustné riešenie $\mathbf{x}$ a nezáporné hodnoty y_i

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Tvrdenie vyplýva z pozorovania

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \right) y_i$$

□

Z dôkazu slabej vety o dualite môžme odvodiť komplementárne podmienky.

Veta 4.29 (Komplementárne podmienky) *Nech* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *a* $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ *sú prípustné riešenia primárnej a duálnej úlohy LP. Potom* $\mathbf{x}$ *a* $\mathbf{y}$ *sú optimálne práve vtedy, keď sú splnené nasledujúce podmienky:*

Primárne komplementárne podmienky *Pre každé* $1 \leq j \leq n$ *: buď* $x_j = 0$ *alebo* $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$

Duálne komplementárne podmienky *Pre každé* $1 \leq i \leq m$ *: buď* $y_i = 0$ *alebo* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$

Veta 4.30 (Silná veta o dualite) *Primárna úloha LP má optimálne riešenie práve vtedy, ak k nej duálna úloha má optimálne riešenie. Navyše, ak* $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ *a* $\mathbf{y}^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ *sú optimálne riešenia primárnej a duálnej úlohy, tak*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

Všimnime si, že toto je naozaj min-max vzťah, keďže jeden program je minimalizačný problém a druhý maximalizačný problém. Prípustné riešenie primárnej(duálnej) úlohy poskytuje YES-certifikát(No-certifikát) na otázku Je optimálna hodnota menšia alebo rovná ako α? Vlastne to ukazuje, že $LP \in NP \bigcap co - NP$. Užitočným nástrojom pri riešení optimalizačných úloh je lineárne programovanie(LP). Zopakujme si — problém lineárneho programovania je definovaný nasledovne:

vstup matica	$A = [a_{ij}], i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$
vektor	$b \in \mathbb{R}^m$
	$c \in \mathbb{R}^n$
ohraničenia	$M(A, b, c) = \{X \in (\mathbb{R}^{0,+})^n \mid AX = b\}$
cena	$cost(X, (A, b, c)) = c^T X = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$
cieľ	minimalizácia

Resp. ohraničenia s rovnosťou nahradíme ohraničeniami s nerovnosťami:

ohraničenia	$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j, j \in I_1$
	$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \geq b_s, s \in I_2$
	$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \leq b_r, r \in \{1, \ldots, m\} - (I_1 \cup I_2)$

O úlohe lineárneho programovania vieme, že efektívnosť jej riešenia závisí od oboru hodnôt riešenia X.

- pre $X \in \mathbb{R}$ existuje algoritmus plynomiálnej zložitosti
- pri $X \in \mathbb{Z}$, tzv. ILP, resp. $X \in \{0, 1\}^n$, tzv. 0-1LP algoritmus polynomiálnej zložitosti nepoznáme

Vzhľadom k tejto rôznej zložitosti využívame LP pri návrhu *aproximačných* algoritmov. Základná schéma využitia je nasledovná:

1. formulácia pôvodného problému ako úlohy ILP, resp. 0-1LP; $ILP(I)$
2. relaxácia na úlohu lineárneho programovania LP; $Rel - LP(I)$
3. transformácia optimálneho riešenia relaxovaného problému na *prípustné* riešenie pôvodného problému. Výsledná kvalita získaného algoritmu zrejme záleží od tejto transformácie. Jednou z vhodných metód je *metóda náhodného zaokrúhľovania*.

Spravme relaxáciu $ILP(I) \rightsquigarrow Rel - LP(I)$. Nech
α je optimálne riešenie pre $Rel - LP(I)$
$Opt_U(I)$ je optimálne riešenie $ILP(I)$.
Potom (prečo?)

$$cost(\alpha) = Opt(Rel - LP(I)) \begin{cases} \leq Opt_U(I), & \text{pre minimalizačný problém} \\ \geq Opt_U(I), & \text{pre maximalizačný problém} \end{cases}$$

Pri návrate od optimálneho α k prípustnému β sa snažíme pokaziť kvalitu α čo najmenej. Toto je tá časť, ktorá súvisí s NP-ťažkosťou pôvodného problému ILP. Na príklade Min-VC ukážeme formuláciu optimalizačných úloh ako úloh LP.

Príklad 4.5 *Uvažujme problém minimálneho vrcholového pokrytia, v ktorom hľadáme minimálnu množinu vrcholov U, ktorá pokrýva všetky hrany. Prípustným riešením je teda vektor $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ taký, že $x_i = 1 \Leftrightarrow v_i \in U$. Formulujme ako úlohu LP:* *Min-VC*

minimalizovať $\sum_{i=1}^{n} x_i$

podmienky $x_i + x_j \geq 1 \quad \forall (v_i, v_j) \in E$
$x_i \in \{0,1\}$

relaxácia *podmienku* $x_i \in \{0,1\}$ *nahrádzame dvomi podmienkami* $x_i \geq 0$ *a* $x_i \leq 1$

Majme optimálne riešenie $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in [0,1]^n$ relaxovaného problému. K nemu zostrojíme prípustné riešenie β pôvodného problému zaokrúhlením takto

$$\beta_i = 1 \Leftrightarrow \alpha_i \geq 1/2$$

Ukážeme, že sme získali 2-aproximačný algoritmus.

prípustné riešenie

- V optimálnom riešení relaxovanej úlohy α platí $\alpha_i + \alpha_j \geq 1$ pre každú hranu $(v_i, v_j) \in E$. To ale znamená, že aspoň pre jedno $\alpha_t, t \in \{i, j\}$ platí $\alpha_t \geq 1/2$. Následne do vrcholového pokrytia zaradíme vrchol v_t. Každá hrana je teda pokrytá.

kvalita

- Keďže $\beta_i \leq 2\alpha_i$ pre každé i, o cene získaného prípustného riešenia β platí

$$cost(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \leq 2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 2cost(\alpha)$$

$$\text{Aproximačný pomer je } \frac{cost(\beta)}{cost(\alpha)} \leq \frac{2cost(\alpha)}{cost(\alpha)} = 2$$

◇

4.5.3 Náhodné zaokrúhľovanie a problém MaxSAT

Vráťme sa opäť k riešeniu problému MaxSat. V časti 3.2.1 sme ukázali, že náhodne vygenerované pripradenie hodnôt premenným vedie v očakávanom prípade k splneniu polovice klauzúl. V tejto časti ukážeme efektívny pravdepodobnostný algoritmus, ktorý je výsledkom kombinácie metódy relaxácie k LP a náhodného zaokrúhľovania.
Majme teda

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_m, \quad \text{kde } F_i \text{ je elementárna disjunkcia}$$

Označme

$Set^+(F_i)$ množina premenných zo $Set(F_i)$, ktoré sa v F_i vyskytujú bez negácie
$Set^-(F_i)$ množina premenných zo $Set(F_i)$, ktoré sa v F_i vyskytujú s negáciou
$In^+(F_i)$ indexy premenných z $Set^+(F_i)$
$In^-(F_i)$ indexy premenných z $Set^-(F_i)$

Riešime úlohu

formulácia

maximalizovať $\sum_{j=1}^{m} Z_j$

lineárne ohraničenia $\sum_{i \in IN^+(F_j)} y_i + \sum_{i \in IN^-(F_j)} (1 - y_i) \geq Z_j, \; j = 1, \ldots, m$

n+m nelineárnych ohraničení
$y_i \in \{0,1\} \; i = 1, \ldots, n$
$Z_j \in \{0,1\} \; j = 1, \ldots, m$

relaxácia
$1 \geq y_i, y_i \geq 0$
$1 \geq Z_j, Z_j \geq 0$

Označme $\alpha(u), u \in \{y_1, \ldots, y_n, Z_1, \ldots, Z_m\}$ hodnotu u v optimálnom riešení relaxovaného problému. Ľahko vidno, že $\sum_{j=1}^{m} \alpha(Z_j)$ je horný odhad na počet klauzúl, ktoré môžu byť splnené (prečo?). Kľúčovým pre kvalitné prípustné riešenie je zaokrúhľovanie; spravíme ho náhodne:

Algoritmus 39 RRR - random rounding

1: vstupom je úloha 0/1 LP(F)
2: relaxácia 0/1-LP(F) $\rightsquigarrow$ Rel-LP(F)
3: nech $(\alpha(y_1), \ldots, \alpha(y_n), \alpha(Z_1), \ldots, \alpha(Z_m))$ je optimálne riešenie Rel-LP(F)
4: vygeneruj náhodne $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in [0,1]^n$
5: **if** $\gamma_i \in [0, \alpha(y_i)]$ **then** $\beta_i \leftarrow 1$
6: **else** $\beta_i \leftarrow 0$
7: return $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$

Uvedomme si, že takto definovaná $\alpha(y_i)$ je vlastne pravdepodobnosť toho, že $\beta_i = 1$[12]

Lema 4.31 *Nech $k \in N, F_j$ je klauzula s k literálmi, $(\alpha(y_1), \ldots, \alpha(y_n), \alpha(Z_1), \ldots, \alpha(Z_m))$ je optimálne riešenie Rel-LP(F). Potom pravdepodobnosť, že $\beta = RRR(F)$ spĺňa F_j, je aspoň*

$$\left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right) \alpha(Z_j)$$

Dôkaz: Keďže sa na ostatné klauzuly formuly nepozeráme, môžme predpokladať, že $F_j = x_1 \vee \ldots \vee x_k$. Z podmienok LP vyplýva, že

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k \geq Z_j$$

Klauzula F_j bude *nesplnená* práve vtedy ak každé $\beta_i \leftarrow 0, i = 1, \ldots, k$. To nastane s pravdepodobnosťou $\prod_{i=1}^{k}(1 - \alpha(y_i))$. F_j *bude* splnená s pravdepodobnosťou

$$1 - \prod_{i=1}^{k}(1 - \alpha(y_i))$$

čo nadobúda minimum pre $\alpha(y_i) = \frac{\alpha(Z_j)}{k}$. Dostávame teda

$$Pr[F_j(\beta) = 1] \geq 1 - \prod_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{\alpha(Z_j)}{k}\right)$$

čo je vlastne funkcia jednej premennej—$\alpha(Z_j)$. Využijeme nasledujúci fakt, ktorého platnosť ukončuje dôkaz.

Fakt 4.32 *Nech $k \in N$. Potom*

$$f_k(Z) = 1 - \left(1 - \frac{r}{k}\right)^k \geq \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right) r = g_k(r) \ \forall r \in [0,1]$$

K dôkazu faktu 4.32 si stačí uvedomiť, že

- funkcia g_r je lineárna
- funkcia f_k je konkávna
- $f_k(0) = 0 = g_k(0)$

[12] na rozdiel od 1/2 v prípade náhodného generovania pravdivostných hodnôt

- $f_k(1) = 1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k = g_k(1)$

□

Teraz už ľahko zanalyzujeme Algoritmus 39.

Veta 4.33 *Algoritmus RRR je polynomiálny*

1. *pravdepodobnostný* $E\left[\frac{e}{e-1}\right]$*-aproximačný pre problém MaxSAT*
2. *pravdepodobnostný* $E\left[\frac{k^k}{k^k-(k-1)^k}\right]$*-aproximačný pre problém Max-EkSAT*[13]

Dôkaz: Začnime s analýzou času. Redukcia 0/1-LP na Rel-LP je v lineárnom čase,
čas optimálne riešenie Rel-LP vypočítame v polynomiálnom čase a získanie prípustného riešenia pre 0/1-LP z optimálneho pre Rel-LP spravíme v lineárnom čase.

chyba Zopakuje si – algoritmus A je $E[\Delta]$-aproximačný, ak $E\left[\frac{Opt(U)}{A()}\right] \leq \Delta$, resp. ekvivalentne $E[A] \geq Opt/\Delta$. Stačí teda ukázať, že očakávaný počet splnených klauzúl je aspoň $\frac{e-1}{e}\sum_{j=1}^{m}\alpha(Z_j)$, resp. $\frac{k^k-(k-1)^k}{k^k}\sum_{j=1}^{m}\alpha(Z_j)$.

Nech $\delta \in \{0,1\}^n$ je potenciálne riešenie. Potom

$$Prob[\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)] = \prod_{i=1}^{n} q_i, \quad q_i = \begin{cases} \alpha(y_i), & \text{ak } \delta_i = 1 \\ (1 - \alpha(y_i)), & \text{ak } \delta_i = 0 \end{cases}$$

Uvažujme indikačnú premennú Z_j

$$Z_j(\delta) = \begin{cases} 1, & \text{ak } \delta \text{ spĺňa } F_j \\ 0, & \text{ak } \delta \ F_j \text{ nespĺňa} \end{cases}$$

Potom $E[Z_j]$ je pravdepodobnosť toho, že RRR(F) spĺňa F_j.

$$E[Z_j] \geq \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right)\alpha(Z_j)$$

Nás zaujíma $E[Z]$ pre $Z = \sum_{j=1}^{m} Z_j$

$$E[Z] = \sum_{j=1}^{m} E[Z_j] \geq \sum_{j=1}^{m}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right)\alpha(Z_j) = \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right)\sum_{j=1}^{m}\alpha(Z_j)$$

EkSAT

$$\begin{aligned} E[Ratio - EkSAT] &\leq \frac{Opt_{EkSAT}(F)}{E[Z]} \leq \frac{\sum_{j=1}^{m}\alpha(Z_j)}{\left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right)\sum_{j=1}^{m}\alpha(Z_j)} \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{(k-1)^k}{k^k}\right)} = \frac{k^k}{k^k - (k-1)^k} \end{aligned}$$

SAT Keďže $\left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \leq e^{-1}$, je $1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \geq 1 - e^{-1} = \left(1 - \frac{1}{e}\right)$. Preto

$$E[Z] \geq \left(1 - \frac{1}{e}\right)\sum_{j=1}^{m}\alpha(Z_j)$$

[13] Problém Max-EkSAT je MaxSAT obmedzený na vstupy, v ktorých každá klauzula má *presne* k literálov.

$$E[Ratio - SAT] = \frac{OptMaxSAT(F)}{E[Z]} \leq \frac{1}{(1-\frac{1}{e})} = \frac{e}{e-1}$$

Pri vylepšovaní opakovaním opakujeme len časť od vygenerovania náhodného vektora γ. □

4.5.4 Náhodná vzorka s náhodným zaokrúhľovaním

Prezentovali sme dva algoritmy pre riešenie problému MaxSAT — RSAM s pomerom 2 a RRR s pmerom $\frac{e}{e-1}$. Hoci $2 > \frac{e}{e-1}$, $\frac{2^k}{2^k-1} < \frac{k^k}{k^k-(k-1)^k}$ a teda pre dlhé klauzuly je naivný RSAM lepší. V skutočnosti sa dá ukázať (zamyslite sa), že existujú také vstupy I, I', I'' že

- $E[RSAM(I)] > E[RRR(I)]$ //MAxSAT
- $E[RRR(I')] > E[RSAM(I')]$ //MAxSAT
- $E[Ratio - RRR(I'')] < E[Ratio - RSAM(I'')]$ //MAx-EkSAT

Keďže majú rôzne správanie, je rozumné pokúsiť sa ich skombinovať. Spustíme oba algoritmy nezávisle a výsledkom bude lepší zo získaných výsledkov: Poďme analy-

Algoritmus 40 COMB-MAxSAT

1: $\beta \leftarrow RSAM(F)$
2: $\gamma \leftarrow RRR(F)$
3: **if** β spĺňa viac klauzúl ako γ **then** return β
4: **else** return γ

zovať tento algoritmus. Keďže oba algoritmy su polynomiálne, je polynomiálny aj COMB-MaxSAT. *čas*

Na vstupe máme formulu $F(x_1, \ldots, x_n) = F_1 \wedge \ldots \wedge F_m$. *aproximačný pomer*

$(S_{RSAM}, Prob_S)$	2^n možných výpočtov
$(S_{RRR}, Prob_R)$	priestor určuje optimálne riešenie α pre Rel-LP(F)
$(S_{RSAM} \times S_{RRR}, Prob)$	pričom $Prob[C, D] \stackrel{def.}{=} Prob_S[C] \times Prob_R[D]$

Majme beh algoritmu COMB-MaxSAT, ktorý vypočítal optimálne priradenia β, γ. Označme

$Y[\beta, \gamma]$ počet splnených klauzúl v $F(\beta)$
$Z[\beta, \gamma]$ počet splnených klauzúl v $F(\gamma)$
$U[\beta, \gamma] = \max\{Y[\beta, \gamma], Z[\beta, \gamma]\}$. Keďže maximum nie je menšie ako aritmetický priemer

$$E[U] \geq \frac{E[Y] + E[Z]}{2}$$

Kvôli podrobnejšej analýze si klauzuly rozdelíme do triedy podľa počtu literálov; C_k budú tie klazuly, ktoré majú presne k literálov.

Algoritmus RRR vypočíta priradenie, ktoré spĺňa nanajvýš $\sum_{j=1}^{m} \alpha(Z_j)$ klauzúl.

$$
\begin{aligned}
E[Z] &\geq \sum_{k\geq 1}\sum_{F_j\in C(k)}\left(1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^k\right)\alpha(Z_j)\\
E[Y] &= \sum_{k\geq 1}\sum_{F_j\in C(k)}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\geq\sum_{k\geq 1}\sum_{F_j\in C(k)}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\alpha(Z_j)\\
E[U] &\geq \frac{E[Z]+E[Y]}{2}\geq\frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\sum_{F_j\in C(k)}\left[\left(1-\frac{1}{2^k}\right)+\left(1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^k\right)\right]\alpha(Z_j)\\
&\geq \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\sum_{k\geq 1}\sum_{F_j\in C(k)}\alpha(Z_j)=\frac{3}{4}\sum_{j=1}^{m}\alpha(Z_j)
\end{aligned}
$$

Dokázali sme teda nasledovnú vetu:

Veta 4.34 *Algoritmus COMB-MAxSAT je polynomiálny pravdepodobnostný $E[4/3]$-aproximačný algoritmus pre problém MaxSAT.*

Kapitola 5

Optimalizačné problémy, aproximačné algoritmy a triedy zložitosti

V tejto časti sa budeme venovať riešeniu optimalizačných úloh, ktoré sú z hľadiska zložitosti ťažké. Najskôr si všimneme vzťah rozhodovacej verzie a konštrukčnej verzie optimalizačného problému, potom si vysvetlíme prístupy k hodnoteniu kvality aproximačných algoritmov a zadefinujeme rôzne triedy zložitosti, kde sledovanou miery zložitosti je kvalita získaného algoritmu. Napokon ukážeme príklady problémov z jednotlivých tried. V ďalšej kapitole sa potom budeme venovať aproximačným algoritmom pre viacero konkrétnych optimalizačných problémov.

Definícia 5.1 Optimalizačný problém $\mathcal{P}$ *je štvorica* $(I, Sol, m, ciel)$*, kde*

I	*je množina vstupných inštancií*
Sol	*je funkcia, ktorá každej vstupnej inštancii* $x \in I$ *priradí množinu* $Sol(x)$ *prípustných riešení*
m	*je účelová funkcia/miera/cena, ktorá* $\forall x \in I, y \in Sol(x)$ *vráti cenu* $m(x,y)$[1]
$ciel$	*je alebo* min *alebo* max

Optimálna hodnota $opt(x) = ciel\{m(x,y) \mid y \in Sol(x)\}$*. Budeme ju označovať aj* $m^*(x)$*,* $m(x, y^*(x))$*,* $m^*(x,y)$*.*

Riešiť optimalizačný problém znamená nájsť také prípustné riešenie, ktoré optimalizuje účelovú funkciu. V tejto súvislosti celkom prirodzene vznikajú viaceré otázky: je optimálna hodnota menšia/väčšia/rovná nejakej konkrétnej hodnote? Ak viem, že m^* je optimálna hodnota, ako nájdem to riešenie α, ktoré ju dosahuje? Aký je vzťah týchto otázok/problémov navzájom?

Nech $\mathcal{P}$ je optimalizačný problém.

Konštrukčný problém $\mathcal{P}_C$ je problém, keď k vstupnej inštancii $x \in I$ chceme vypočítať optimálne riešenie $y^*(x) \in Sol(x)$ aj jeho hodnotu $m^*(x)$

Hodnotový problém $\mathcal{P}_E$ je taká verzia, keď nás pre vstupnú inštanciu $x \in I$ zaujíma len hodnota optimálneho riešenia $m^*(x)$

Rozhodovací problém/underlying language $\mathcal{P}_D$ je problém, keď pre vstupnú inštanciu $x \in I$ a hodnotu $k \in \mathbb{N}$ máme rozhodnúť, či

$$\exists y \in Sol(x) \begin{cases} m(x,y) \leq k, & \text{pre minimalizačný problém} \\ \\ m(x,y) \geq k, & \text{pre maximalizačný problém} \end{cases}$$

Väčšinou sa budeme zaoberať optimalizačnými problémami, ktorých rozhodovacie verzie sú NP-úplné. To, ako o chvíľu uvidíme, znamená, že nemožno očakávať efektívne algoritmy na ich riešenie. Budeme preto na ich riešenie používať aproximačné algoritmy. Vzhľadom na existenciu aproximačných algoritmov rôznej kvality[2] ich rozdelíme do viacerých tried.

5.1 Optimalizačné vs. rozhodovacie problémy

Analógom triedy NP pre optimalizačné problémy je trieda NPO.

Definícia 5.2 *Triedu NPO tvoria optimalizačné problémy $\mathcal{P}=(I, Sol, m, ciel)$ pre ktoré:*

- *$\exists$ polynóm p taký, že $\forall x \in I, y \in Sol(x): \ |y| \leq p(|x|)$*
- *problém príslušnosti $y \in Sol(x) \in \P$*
- *výpočet $m(x, y)$ trvá polynomiálny čas*

Začnime jednoduchým pozorovaním.

Fakt 5.1 *Ak optimalizačný problém $\mathcal{P} \in$ NPO tak $\mathcal{P}_D \in$ NP*

Nedeterministický TS so vstupom (x, k) uhádne y, overí, že $y \in Sol(x)$, vypočíta $m(x, y)$ a porovná $k?m(x, y)$. $\diamond$

Kedy hovoríme, že je optimalizačný problém ťažký? Pri definícii využijeme Turingovskú redukovateľnosť[3] (budeme značiť $\leq_T^p$) a pojem Turingovho stroja s pomocou. Turingov stroj s pomocou–značíme T^g–je TS, ktorý má jednu špeciálnu pásku a dva špeciálne stavy $q_?, q_!$. Keď je v stave $q_?$ a na špeciálnej(query) páske má napísané slovo x, TS T^g v jednom kroku prejde do stavu $q_!$, pričom slovo x na query páske sa nahradí výsledkom $g(x)$.

Definícia 5.3 *Nech $\mathcal{P}_i=(I_i, Sol_i, m_i, ciel_i), i = 1, 2$, sú dva optimalizačné problémy. Nech $g(x) \in Sol_2^*(x)$. Hovoríme, že problém $\mathcal{P}_1$ je výpočtovo redukovateľný na optimalizačný problém $\mathcal{P}_2$, značíme $\mathcal{P}_1 \leq_T^p \mathcal{P}_2$, ak existuje deterministický TS s pomocou g, ktorý v polynomiálnom čase rieši $\mathcal{P}_1$.*
Ak $\mathcal{P}_1 \leq_T^p \mathcal{P}_2$ a $\mathcal{P}_2 \leq_T^p \mathcal{P}_1$, potom sú problémy $\mathcal{P}_1$ a $\mathcal{P}_2$ výpočtovo ekvivalentné, čo označujeme $\mathcal{P}_1 \equiv_T^p \mathcal{P}_2$

Inými slovami, problém $\mathcal{P}_1$ by sme vedeli optimálne vypočítať v polynomiálnom čase, ak by sme vedeli v konštantnom čase získať optimálne riešenie optimalizačného problému $\mathcal{P}_2$. Polynomiálny čas teda spotrebovávame na transformáciu vstupu x_1 pre problém $\mathcal{P}_1$ na vstup x_2 pre problém $\mathcal{P}_2$ a na transformáciu optimálneho riešenia y_2^* problému $\mathcal{P}_2(x_2)$ na optimálne riešenie y_1 problému $\mathcal{P}_1(x_1)$.

Pojem výpočtovej redukovateľnosti hrá pro definícii NPO-ťažkosti analogickú úlohu ako pojem polynomiálnej redukovateľnosti pri definícii NP-ťažkosti.

Definícia 5.4 *Optimalizačný problém $\mathcal{P} = (I, Sol, m, ciel)$ je NPO- ťažký, ak pre každý optimalizačný problém $\mathcal{P}'$ platí $\mathcal{P}' \leq_T^p \mathcal{P}$*

Definícia 5.5 *Hovoríme, že optimalizačný problém $\mathcal{P}$ je* NP-ťažký, *ak pre každý rozhodovací problém $\mathcal{P}' \in NP$ je $\mathcal{P}' \leq_T^p \mathcal{P}$.*

[2] pod rôznou kvalitou nemáme na mysli rôznu hodnotu konštanty

[3] Turingovská redukovateľnosť: Nech A je problém, ktorý počíta funkciu $g : I_A \to Sol_A$. Problém A $\leq_T^p$ B, ak existuje polynomiálny algoritmus na riešenie A s orákulom B (pre vstup $x \in I_B$ vráti $f(x) \in Sol_B$)

Ľahko vidno:

Veta 5.2 *Nech $\mathcal{P} \in$ NPO. Ak rozhodovacia verzia $\mathcal{P}_\mathcal{D} \in NPU$, tak $\mathcal{P}$ je NP-ťažký.*

Veta 5.3 $P \neq NP \Rightarrow PO \neq NPO$

O vzťahu rozhodovacej, hodnotovej a konštrukčnej verzie optimalizačného problému hovorí nasledujúca veta. Prirodzene je konštrukčná verzia najťažšia - pomocou nej vieme aj rozhodovaciu aj hodnotovú verziu. Ukazuje sa tiež, že rozhodovacia a hodnotová verzia sú rovnako ťažké.

Veta 5.4 $\forall \mathcal{P} \in NPO\ \mathcal{P}_D \equiv_T^p \mathcal{P}_E \leq_T^p \mathcal{P}_C$

Dôkaz:

$\mathcal{P}_\mathbf{D} \leq_\mathbf{T}^\mathbf{p} \mathcal{P}_\mathbf{E}$

Chceme riešiť rozhodovaciu verziu problému pomocou hodnotovej; pre vstup (x,k) nás zaujíma, či $m^*(x)$ je menšie alebo väčšie ako k, pričom pri riešení môžme využívať informáciu o optimálnej hodnote. Potrebný Turingov stroj T s pomocou preto môžme skonštruovať nasledovne:

- T používa funkciu g takú, že pre vstup x vráti optimálnu hodnotu $m^*(x)$
- pre vstup (x,k) napíše T na query pásku a prejde do stavu $q_?$, v ktorom komunikuje s orákulom. Následne sa na páske objaví hodnota $g(x)$, teda hodnota optimálneho riešenia $m^*(x)$.
- T porovná $g(x) = m^*(x) \overset{?}{\leq} k$ a správne odpovie.

Čas výpočtu stroja T je polynomiálny.

$\mathcal{P}_\mathbf{E} \leq_\mathbf{T}^\mathbf{p} \mathcal{P}_\mathbf{C}$

Ak máme prístup k optimálnej hodnote aj optimálnemu riešeniu, optimálna hodnota nie je problém. Stroj s pomocou dostane vstup x, napíše na query pásku dotaz x, orákulum vráti $(m^*(x), y^*(x))$, z čoho T oddelí $m^*(x)$. Čas je triviálne polynomiálny.

$\mathcal{P}_\mathbf{E} \leq_\mathbf{T}^\mathbf{p} \mathcal{P}_\mathbf{D}$

Keďže náš problém je z NPO, vieme dĺžku zápisu hodnoty $m(x,y)$ zhora ohraničiť časom, čiže hodnotou $p(|x|)$. To ale znamená, že optimálna hodnota $m^*(x)$ je zhora ohraničená hodnotou $2^{p(|x|)}$. No a keď máme horný odhad na hľadabú hodnotu, môžme túto hodnotu využitím dotazov na orákulum rozhodujúce $k \leq m^*(x)$ získať binárnym vyhľadávaním. Robíme nanajvýš $\log 2^{p(|x|)} = O(p(|x|))$ dotazov na orákulum, preto je celkový čas polynomiálny.

□

Veta 5.5 *Nech $\mathcal{P} \in NPO$ a nech jeho rozhodovacia verzia $\mathcal{P}_D \in$ NPU. Potom $\mathcal{P}_C \leq_T^p \mathcal{P}_D$*

Dôkaz: W.l.o.g. predpokladajme, že pôvodný problém bol maximalizačný. Konštrukciu spravíme v dvoch krokoch

- Najprv ukážeme, že existuje NP problém B_D taký, že $\mathcal{P}_C \leq_T^p B_D$
- Potom využijeme NP-úplnosť $\mathcal{P}_D$, z čoho dostaneme $B_D \leq_T^p \mathcal{P}_D$

Problém B sa od pôvodného problému $\mathcal{P}$ líši v cene. Zvolíme ju tak, aby sme z riešenia problému B vedeli ľahko získať riešenie problému $\mathcal{P}$. Presnejšie: nech p je polynóm, ktorý ohraničuje dĺžku prípustného riešenia problému $\mathcal{P}$, nech $\lambda(y)$ označuje poradie prípustného riešenia y v lexikografickom usporiadaní. Potom cenu prípustného riešenia problému B definujeme

$$m_B(x,y) = 2^{p(|x|)+1} m_\mathcal{P}(x,y) + \lambda(y) \quad \leftrightsquigarrow \quad \boxed{m_\mathcal{P}(x,y)} \underbrace{\boxed{0^*\lambda(y)}}_{p|x|}$$

Je zrejmé, že $\lambda(y) \leq p(|x|)$. Preto

$$\forall x \in I_B \forall y_1, y_2 \in Sol_B(x), y_1 \neq y_2 : \ m_B(x, y_1) \neq m_B(x, y_2)$$

To ale znamená, že vieme nájsť jednoznačné optimálne riešenie $y_B^*(x)$.

$\mathcal{P}_C \leq_T^p B_D$ Keďže $\mathcal{B}_D \equiv_T^p \mathcal{B}_E$, budeme dokazovať $\mathcal{P}_C \leq_T^p B_E$. Stroj s pomocou T, ktorý konštruuje optimálne riešenie pre problém $\mathcal{P}$ používa ako orákulum funkciu, ktorá počíta hodnotu optimálneho riešenia problému B: $m_B(x, y^*) = 2^{p(|x|)+1} m_{\mathcal{P}}(x, y^*) + \lambda(y)$. Pracuje nasledovne:

- Napíše vstupné slovo $x \in I_{\mathcal{P}} = I_B$ na query pásku a dotazom na orákulum zistí hodnotu optimálneho riešenia $m_B(x, y^*) = 2^{p(|x|)+1} m_{\mathcal{P}}(x, y^*) + \lambda(y)$ problému B.
- Z hodnoty $m_B(x, y^*) = 2^{p(|x|)+1} m_{\mathcal{P}}(x, y^*) + \lambda(y^*)$ vypočíta $\lambda(y^*)$. Následne postupným generovaním $y \in SOL_B(x)$ nájde y^*, pre ktoré $\lambda(y^*) = \lambda(y)$.
- Pomocou B_D vieme simulovať B_E v polynomiálnom čase, preto $m_{\mathcal{P}}^*(x)$ vieme získať v polynomiálnom čase pomocou orákula pre B_D.

$B_D \leq_T^p \mathcal{P}_D$ Keďže $B_D \in \mathsf{NP}$ a $\mathcal{P}_D \in \mathsf{NPU}$, tak orákulum pre $\mathcal{P}_D$ môžeme použiť na simuláciu orákula pre B_D.

□

Či existuje $\mathcal{P} \in NPO$, pre ktorý $\mathcal{P}_C$ je ťažší ako $\mathcal{P}_E$ sa nevie.

5.2 Aproximačné algoritmy a klasifikácia optimalizačných problémov

Ako sme už povedali, aproximačné algoritmy používame väčšinou pri optimalizačných úlohách, kde získanie optimálneho riešenia je neúmerne ťažké. Vtedy *upúšťame od presnosti* a snažíme sa o približné riešenie, ktoré ale *dostaneme rýchlo*. Začnime definíciami základných pojmov.

Definícia 5.6 Aproximačný algoritmus A *pre optimalizačný problém U je algoritmus* polynomiálnej *časovej zložitosti, ktorý pre každý prípad x problému U vypočíta nejaké prípustné riešenie* $A(x)$; $A(x) \in Sol(x)$

absolútna chyba $D(x, y) := |m^*(x) - m(x, y)|$

relatívna chyba

$$E_A(x, y) := \frac{D(x, y)}{\max\{m^*(x), m(x, y)\}}$$

$$E(x, y) = \begin{cases} 1 - \frac{m^*(x)}{m(x,y)}, & \textit{pre minimalizačný problém;} \\ 1 - \frac{m(x,y)}{m^*(x)}, & \textit{pre maximalizačný problém.} \end{cases}$$

$$E_A(n) = \max\{E_A(x, y) | x \in L \cap (\Sigma_I)^n\}$$

aproximačný pomer

$$R_A(x,y) := \max\left\{\frac{m(x,A(x))}{(m^*(x)}, \frac{(m^*(x)}{m(x,A(x))}\right\}$$

$$R_A(x) = \begin{cases} \frac{m(x,y)}{m^*(x)}, & \textit{pre minimalizačný problém;} \\ \\ \frac{m^*(x)}{m(x,y)}, & \textit{pre maximalizačný problém.} \end{cases}$$

$$R_A(n) := \max\{R_A(x,y)|x \in L \cap (\Sigma_I)^n\}$$

performance ratio

$$r = \inf\{r'|\forall x\ R_A(x,y) \leq r'\}$$

Zrejme

$$R_A(x,y) = \frac{m^*(x)}{m(x,y)} = \frac{1}{1 - E_A(x,y)}$$

Čím bližšie je hodnota $R_A(x,y)$ k 1, resp. $E_A(x,y)$ k 0, tým kvalitnejšie riešenie(bližšie k optimálnemu) algoritmus vypočíta.

ϵ-aproximačný a r-aproximačný algoritmus

Nech U je optimalizačný problém a nech A je algoritmus pre U, ktorý je polynomiálnej časovej zložitosti vzhľadom k dĺžke vstupnej inštancie $x \in L$. Ak kvalitu algoritmu A vyjadrujeme relatívnou chybou, hovoríme väčšinou o ϵ-aproximačnom algoritme; ak kvalitu vyjadrujeme aproximačným pomerom, hovoríme o r-aproximačnom algoritme:

Hovoríme, že algoritmus A je *ϵ-aproximačný* pre U ak pre nejaké reálne číslo $\epsilon > 0$ platí $E_A(x,y) \leq \epsilon$ pre každé $x \in L$.

Hovoríme, že algoritmus A je *r-aproximačný* pre U ak pre nejaké reálne číslo $r > 1$ platí $R_A(x,y) \leq r$ pre každé $x \in L$.

Hovoríme, že algoritmus A je *$f(n)$-aproximačný* pre U ak pre funkciu $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ a pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $R_A(n) \leq f(n)$.

APX

Triedu optimalizačných problémov, pre ktoré existuje polynomiálny r-aproximačný algoritmus (pre nejaké r), označujeme APX.

Môžme presnosť/veľkosť chyby považovať za ďalší z parametrov hľadaného algoritmu? Dokážeme vždy skonštruovať aproximačný algoritmus s požadovanou presnosťou? Uvedomme si, že samotný pojem aproximačného algoritmu v sebe zahŕňa požiadavku na polynomiálny čas!

PTAS

Definícia 5.7 *Nech $U = (I, Sol, m, ciel)$ je optimalizačný problém. Hovoríme, že algoritmus A je* polynomiálna aproximačná schéma *(*PTAS*) pre U, ak $\forall(x,\epsilon) \in I \times R^+$ A vypočíta prípustné riešenie s maximálnou relatívnou chybou ϵ, pričom $Time_A(x, \epsilon^{-1})$ môže byť ohraničený funkciou, ktorá je polynomiálna od $|x|$.*

FPTAS

Ak navyše $Time_A(x, \epsilon^{-1})$ môžme ohraničiť funkciou, ktorá je polynomiálna od oboch *parametrov $|x|, \epsilon^{-1}$, tak A je* úplná polynomiálna aproximačná schéma *(*FPTAS*) pre U.*

Je zrejmé, že FPTAS je "to najlepšie", čo pre ťažké optimalizačné problémy môžme dostať. A teraz už spomínaná klasifikácia.

NPO(I) tvoria problémy, pre ktoré existuje FPTAS

NPO(II) tvoria problémy, pre ktoré existuje PTAS

NPO(III) tvoria problémy, pre ktoré existuje δ-aproximatívny algoritmus pre nejaké $\delta > 1$, ale neexistuje d-aproximatívny algoritmus pre $d < \delta$. (teda neexistuje PTAS)

NPO(IV) tvoria problémy, pre ktoré existuje $f(n)$-aproximatívny algoritmus pre nejakú fciu $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, ktorá sa dá zhora ohraničiť polylogaritmickou funkciou, ale pre ktoré neexistuje δ-aproximatívny algoritmus pre žiadnu konštantu $\delta \in \mathbb{R}$

NPO(V) tvoria ostatné problémy z NPO

PTAS, resp FPTAS označujú aj triedu optimalizačných problémov, pre ktoré existuje PTAS, resp. FPTAS. Ľahko vidno, že

$$\mathsf{PO} \subseteq \text{FPTAS} \subseteq \text{PTAS} \subseteq \text{APX} \subseteq \mathsf{NPO}$$

Ak by $P = NP$, tak by všetky tieto triedy boli rovnaké. Naopak, platnosť $P \neq NP$ znamená, že sú navzájom rôzne. Dá sa totiž ukázať, že

- KNAPSACK $\in FPTAS$, ale rozhodovacia verzia je NPÚ, takže KNAPSACK $\notin PO$
- rozhodovacia verzia LARGEPACKING je NP-úplná v silnom zmysle, takže existencia FPTAS by znamenala P=NP.
- LARGEPACKING má PTAS
- MAX3SAT patrí do APX, ale nie do $PTAS$
- existencia polynomiálneho algoritmu s konštantným performance ratio pre TRAVELINGSALESMANPROBLEM by znamenala existenciu polynomiálneho algoritmu pre HAMILTONIANCIRCUIT

5.2.1 Ilustračné príklady-Absolútna chyba

Absolútnou chybou rozumieme absolútnu hodnotu rozdielu medzi získaným a optimálnym riešením

$$D(x, y) = |m(x, y) \ - m^*(x)|$$

Príkladov problémov s absolútnou chybou nie je veľa. Väčšinou sa jedná o problémy, kde sa hodnota účelovej funkcie pohybuje v malej množine hodnôt.

farbenie hrán vieme, že sa to dá alebo $\triangle$ alebo $\triangle + 1$. Čo z toho platí pre daný vstup je NP-ťažké...

Určite neprekvapí, že existujú príklady ťažkých problémov, pre ktoré aproximačný algoritmus s absolútnoui chybou neexistuje.

Negatívny výsledok

Ak $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$, tak pre problém KNAPSACK(KS) neexistuje aproximačný algoritmus (polynomiálnej zložitosti) s absolútnou chybou.

Dôkaz: Pri dôkaze postupujeme štandardne - ak by sme taký algoritmus A mali, vedeli by sme pomocou neho vyriešiť nejaký NP-úplný problém v polynomiálnom čase; resp. NPO-úplný v polynomiálnom čase presne.

Ako? Nech A rieši KS s absolútnou chybou k.

- prepočítaj *profity* - $p'_i = (k+1)p_i$; uvedomme si, že pri takto prepočítaných hodnotách je hodnota každého (prípustného aj optimáneho)riešenia násobkom $(k+1)$
- vyrieš takto modifikovaný problém algoritmom A
- získané riešenie vlastne identifikuje optimálne riešenie pôvodného problému

$$|m(x',y) - m^*(x')| \leq k$$
$$|(k+1)m(x,y) - (k+1)m^*(x)| = (k+1)|m(x,y) - m^*(x)| \leq k$$
$$|m(x,y) - m^*(x)| \leq \frac{k}{k+1}$$

Keďže sa hýbeme v prirodzených číslach, z $|m(x,y) - m^*(x)| < 1$ vyplýva, že $m(x,y) - m^*(x) = 0$ □

5.2.2 Ilustračné príklady-Relatívna chyba, aproximačný pomer

$$E(x,y) = \frac{|m^*(x) - m(x,y)|}{max\{m^*(x), m(x,y)\}}$$
$$R(x,y) = \max\left\{\frac{m^*(x)}{m(x,y)}, \frac{m(x,y)}{m^*(x)}\right\}$$

Príklad 5.1 *Uvažujme* KnapSack *a greedy metódu, ktorá vyberá prvky podľa maximálneho relatívneho profitu.*

Vieme, že ak pripustíme riešenie v racionálnych číslach, uvedený greedy prístup garantuje optimalitu získaného riešenia. Pri riešení v celých číslach, resp. 0/1-riešení, je však problém ťažký, a preto greedy algoritmus optimalitu negarantuje.
Čo vieme povedať o kvalite takto získaného riešenia? Uvažujme takýto vstup: *kvalita*

$w_i = p_i = 1$ pre $i = 1, \ldots, n-1$
$w_n = b = kn,\ p_n = b - 1$

Keďže relatívny profit $p_i/w_i = 1 > p_n/w_n = (b-1)/b$ pre $i = 1, \ldots, n-1$, dosiahne greedy prístup profit $\mathbf{m_G(x,y) = n-1}$. Pritom $\mathbf{m^*(x) = b-1 = kn-1}$

$$R(x,y) = \frac{b-1}{n-1} = \frac{kn-1}{n-1} > k$$

Aproximačný pomer greedy algoritmu môže dosahovať ľubovoľne veľké hodnoty.

Ľahko vidno, že optimalitu pokazil vlastne posledný objekt, ktorého relatívny profit bol nižší, ako relatívny profit ostatných, celkový zisk za jeho umiestnenie do batoha však prevýšil možný zisk za umiestnenie všetkých ostatných objektov súčasne. Toto pozorovanie môžme zakomponovať do greedy riešenia, čím získame algoritmus **H**.
Čo vieme povedať o kvalite, resp. chybe algorimu **H**? Nech j je index prvého prvku, ktorý sme *nezaradili* do greedy riešenia. Potom pre doterajšiu váhu $W(j)$ a profit $P(j)$ platí *kvalita*

Algoritmus 41 ModifGreedy H

1: utrieď nerastúco podľa relatívneho profitu $\frac{p_1}{w_1} \geq \cdots \geq \frac{p_n}{w_n}$
2: greedy
3: $m_H(x,y) = \max\{p_{max}, m_G(x,y)\}$

$$\begin{aligned} W(j) &= \textstyle\sum_{i=1}^{j-1} w_i \leq b; \qquad b - W(j) < w_j \\ P(j) &= \textstyle\sum_{i=1}^{j-1} p_i \leq m_G(x,y) \end{aligned}$$

Vieme, že hodnota optimálneho racionálneho riešenia je horným odhadom na cenu optimálneho celočíselného riešenia a že vektor optimálneho racionálneho riešenia by bol $(x_1, \ldots, x_n)$, kde $x_1 = \cdots = x_{j-1} = 1$ a $x_j = \frac{(b-W(j))}{w_j} < 1$. Príspevok profitu j-teho objektu v optimálnom riešení racionálnej verzie by teda bol

$$(b - W(j)) \cdot \frac{p_j}{w_j}$$

Spojením dostávame:

$$\boxed{m^*(x)} \leq P(j) + (b - W(j)) \cdot \frac{p_j}{w_j} \boxed{<} P(j) + \frac{w_j p_j}{w_j} = \boxed{P(j) + p_j}$$

Analýzu spravíme podľa toho, ako dopadlo priradenie na riadku 3.

$\mathbf{p_j} \leq \mathbf{P(j)}$

$$\begin{aligned} & m^*(x) < P(j) + p_j \leq 2P(j) = 2m_G(x) \leq 2m_H(x) \\ \Rightarrow \quad & \tfrac{m^*(x)}{m_H(x)} \leq 2 \end{aligned}$$

$\mathbf{p_j} > \mathbf{P(j)}$

$$\begin{aligned} & m^*(x) < P(j) + p_j < P(j) + p_{max} < 2p_{max} \leq 2m_H(x) \\ \Rightarrow \quad & \tfrac{m^*(x)}{m_H(x)} \leq 2 \end{aligned}$$

Ukázali sme, že aproximačný pomer ModifGreedy je 2.

Fakt, že pre NP-plný problém KnapSack existuje polynomiálny aproximačný algoritmus s aproximačným pomerom 2, neznamená, že všetky NP-úplné problémy sú takto dobre aproximovateľné. Príkladom za rozumných predpokladov neaproximovateľného problému je TSP[4].

Negatívny výsledok

Veta 5.6 *Ak $P \neq NP$ tak pre TSP neexistuje ϵ-aproximačný algoritmus (polynomiálnej zložitosti).*

Dôkaz: Budeme postupovať sporom a ukážeme, že pomocou ϵ-aproximačného algoritmu TSP_ϵ pre problém obchodného cestujúceho by sme vedeli presne vyriešiť problém HK v deterministickom polynomiálnom čase.
Nech $m(x,y)$ je riešenie získané algoritmom TSP-HK. Čo by sme vedeli povedať o cene získaného, resp. optimálneho riešenia pre H, ak vieme, že HK v pôvodom grafe existovala/neexistovala?

v G $\exists$ HK

Ak pôvodný graf G obsahoval HK, potom optimálne riešenie pre H obsahuje len existujúce hrany, ktoré majú cenu nižšiu ako je $\frac{|V|}{1-\epsilon}$ (cena neexistujúcich hrán). Preto v tomto prípade $m^*(x) = |V|$. Keďže algoritmus TSP_ϵ je ϵ-aproximačný,

$$\frac{m(x,y) - m^*(x)}{m(x,y)} \leq \epsilon, \text{ čo po úprave dáva } \boxed{m(x,y) \leq \tfrac{|V|}{1-\epsilon}}$$

Algoritmus 42 TSP-HK

1: Majme vstup G pre HK
2: Prerobme ho na vstup H pre TSP tak, že pridáme nenulové ceny pre všetky-teda aj neexistujúce-hrany. Pritom ceny hrán budú také, že nám pomôžu identifikovať, či príslušná kružnica prechádza aj po neexistujúcich hranách.

$$c(i,j) = \begin{cases} 1, & (i,j) \in E; \\ \frac{|V|}{1-\epsilon}, & (i,j) \notin E \end{cases}$$

3: Vyriešme TSP pomocou algoritmu TSP_ϵ s relatívnou chybou ϵ

v $G \nexists$ HK

Ak pôvodný graf HK nemá, tak riešenie vypočítané algoritmom TSP-HK obsahuje aspoň jednu neexistujúcu hranu a preto $m^*(x) \geq |V| - 1 + \frac{|V|}{1-\epsilon} > \frac{|V|}{1-\epsilon}$, V tejto situácii teda $\boxed{m(x,y) \geq m^*(G) > \frac{|V|}{1-\epsilon}}$

Vidíme, že

$$G \text{ obsahuje HK} \iff m(x,y) \leq \frac{|V|}{1-\epsilon}$$

Existenciu alebo neexistenciu HK v G teda určíme na základe hodnoty $m(x,y)$, ktorú vypočítal algoritmus TSP-HK pre problém obchodného cestujúceho v grafe H s dopočítanými cenami.

□

5.2.3 Ilustračné príklady-PTAS pre MinPartition

MinPartition

Na vstupe máme množinu X prirodzených čísel $\{x_1, ..., x_n\}$, ktorú chceme rozdeliť na dve množiny Y_1, Y_2 tak, aby sme minimalizovali ich rozdiel, resp. jednotlivé súčty.

vstup: $X = \{x_1, ..., x_n\}$, pričom $S = \sum x_i$
výstup: rozklad $Y = Y_1, Y_2$ množiny X na disjunktné množiny tak, aby $\max\{\sum_{x_i \in Y_1} x_i, \sum_{x_i \in Y_2} x_i, \} \rightsquigarrow \min$

Triviálnym prípustným riešením problému je vrátiť rozklad $Y = (\emptyset, X)$, ktorého hodnota je $m(x,y) = S$. Keďže $m^*(x) \geq S/2$, pre aproximačný pomer dostávame

$$\frac{m(x,y)}{m^*(x)} \leq \frac{m(x,y)}{(S/2)} \leq \frac{S}{S/2} = 2$$

Preto stačí uvažovať prípad $r \leq 2$.

Algoritmus vychádza z predpokladu/pozorovania, že väčšie čísla sú pre kvalitu riešenia dôležitejšie. Pracuje preto v dvoch fázach - najprv najväčšie čísla spracuje optimálne, potom zvyšok dokončí greedy metódou. Počet prvkov, ktoré v prvej fáze usporiadame optimálne, určíme na základe hodnoty r tak, aby sme dosiahli požadovanú chybu.

čas

1 triedenie $O(n \log n)$
3 hľadanie optimálneho riešenia závisí od počtu možností prenásobeného zložitosťou kontroly; ak použije metódu hrubej sily, je počet možností exponenciálny od $k(r)$.
$O(2^{k(r)} \cdot n)$ je pre konštantu r polynomiálne

[4] TSP=Traveling salesperson problem-problém obchodného cestujúceho

Algoritmus 43 MinPartition

```
1: Utriedime prvky nerastúco podľa váhy x_1 ≥ ... ≥ x_n
2: Určíme počet prvkov k(r), ktoré spracujeme presne
                                   //hodnotu k(r) upresníme neskôr
3: Nájdeme optimálne riešenie pre vstup x_1, ..., x_{k(r)}
4: for j=k(r)+1 to n do                                  //doriešime greedy
5:     if Σ_{x_i∈Y_1} x_i ≤ Σ_{x_i∈Y_2} x_i then
6:         Y_1 := Y_1 ∪ {x_j}
7:     else Y_2 := Y_2 ∪ {x_j}
```

4 pri rozumnej implementácii realizujeme tento cyklus v čase $O(n)$

Máme teda čas polynomiálny odveľkosti pôvodného vstupu.

kvalita

Kvôli jednoduchosti predpokladajme, že

$$x_1 \geq \ldots \geq x_n$$

Nech výsledkom sú množiny Y_1, Y_2. Označme

$$W(Y_1) = \sum_{x_i \in Y_1} x_i \qquad W(Y_2) = \sum_{x_i \in Y_2} x_i;\ \text{predpokladáme } W(Y_1) \geq W(Y_2)$$

Potom $L = \frac{(W(Y_1)+W(Y_2)}{2}$ je dolný odhad na hodnotu optimálneho riešenia.

$h \leq k$

Nech h je index posledného prvku, ktorý sme počas realizácie algoritmu pridali do Y_1. Hodnota $h \leq k$ hovorí, že v Y_1 sú len prvky, ktoré sme tam umiestnili v prvej fáze. To ale znamená, že *optimálny výsledok* sme dostali už v prvej časti algoritmu.

$h \geq k$

Predpokladajme teda, že $h > k$, x_h je prvok, ktorý sme do Y_1 pridali v druhej fáze. Keďže x_h sme pridali do Y_1, tak $W(Y_1) - x_h \leq W(Y_2)$. Pripočítaním $W(Y_1)$ k obom stranám

$$2W(Y_1) \leq x_h + W(Y_2) + W(Y_1) = x_h + W(X) = x_h + 2L$$

$$W(Y_1) \leq L + \frac{x_h}{2}$$

Vieme, že $\forall j < k(r)$ je $x_h \leq x_j$, preto $2L = W(Y_1) + W(Y_2) \geq x_h(k(r)+1)$

$$W(Y_1) \geq L \geq W(Y_2) \ \ \& \ \ m^*(x) \geq L$$

$$\frac{W(Y_1)}{m^*(x)} \leq \frac{W(Y_1)}{L} \leq \frac{L + \frac{x_h}{2}}{L} = 1 + \frac{x_h}{2L} \leq 1 + \frac{x_h}{x_h(k(r)+1)} = 1 + \frac{1}{k(r)+1}$$

určenien $k(r)$

Ak chceme, aby $1 + \frac{1}{k(r)+1} \leq r$, musí platiť $\frac{2-r}{1-r} \leq k(r)$. Preto v algoritme nastavíme

$$k(r) = \left\lceil \frac{(2-r)}{(r-1)} \right\rceil$$

Pre takto zvolenú hodnotu $k(r)$ platí, čo sme chceli

$$\frac{W(Y_1)}{m^*(x)} \leq r$$

$\diamond$

5.2.4 Ilustračné príklady-FPTAS pre KnapSack

O probléme KnapSack vieme, že greedy metóda dáva optimálne riešenie v obore racionálnych čísel a že dynamickým programovaním získame pseudopolynomiálny algoritmus na presné riešenie KS v obore celých čísel v čase $O(n \cdot \sum_{i=1}^{n} c_i) = O(n^2 c_{max})$, kde $c_{max} = \max\{c_1, \ldots, c_n\}$. Ak by sme z pseudopolynomiálneho algoritmu chceli dostať polynomiálny, stačilo by znížiť hodnotu c_{max}. Presne takto budeme postupovať. *Naškálujme vstup tak, aby sme nepracovali s hodnotami exponenciálnymi vzhľadom na veľkosť vstupu. Tým stratíme presnosť.*

Algoritmus FPTAS-KnapSack

Algoritmus 44 FPTAS-KnapSack

1: $\mathbf{T} \leftarrow \lfloor \frac{\mathbf{c_{max}(r-1)}}{\mathbf{rn}} \rfloor$
2: naškálujeme vstup $c'_i \leftarrow \lfloor \frac{c_i}{T} \rfloor$
3: pre naškálovaný vstup nájdi *presné* riešenie $m'(x, y)$ dynamickým programovaním
4: $m(x, y)$ je riešenie s *pôvodnými* cenami

kvalita

Pri analyzovaní chyby, ktorej sme sa dopustili, si uvedomme, že pre $d_i \leftarrow T \cdot c'_i$ platí

$$d_i \leq c_i \quad \text{ale} \quad |c_i - d_i| < T$$

Každý prvok zaradený do riešenia môže priniesť chybu max. T, preto

$$m^*(x) - m(x, y) \leq n \cdot T$$

Súčasne $n \cdot c_{max} \geq m^*(x) \geq c_{max}$, čiže môžme písať

$$\frac{m^*(x) - m(x, y)}{m^*(x)} \leq \frac{n \cdot T}{c_{max}}$$

$$\mathbf{m^*(x)(c_{max} - n \cdot T) \leq c_{max} m(x, y)}$$

$$m^*(x) \leq \frac{c_{max}}{c_{max} - n \cdot T} \cdot m(x, y)$$

vzhľadom na voľbu T

$$m^*(x)\left(\mathbf{c_{max}} - \frac{\mathbf{r-1}}{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{c_{max}}\right) \leq m^*(x)(c_{max} - n \cdot T) \leq \mathbf{c_{max} m(x, y)}$$

$$m^*(x) \leq \mathbf{m(x, y)} \cdot \frac{\mathbf{c_{max}}}{\mathbf{c_{max}}(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{r-1}}{\mathbf{r}})} = m(x, y) \cdot \frac{r}{r - r + 1} = r \cdot m(x, y)$$

$$m^*(x) \leq r \cdot m(x, y)$$

$$\boxed{\frac{m^*(x)}{m(x,y)} \leq r}$$

Algoritmus garantuje požadovaný aproximačný pomer r

čas

Pri analýze času si všimnime počet iterácii algoritmu dynamického programovania. Naškálovaním vstupu sme dosiahli, že maximálny možný zisk je $nc'_{max} \leq \frac{nc_{max}}{T}$

$$n \cdot \frac{\mathbf{c_{max}}}{T} \leq \frac{n}{T} \cdot \frac{\mathbf{rnT}}{\mathbf{(r-1)}} = \frac{rn^2}{(r-1)}$$

Celkový čas algoritmu je teda $O(\frac{n^3 r}{r-1})$

V čase, ktorý je polynomiálny od vstupu aj $1/r$ máme aproximatívny algoritmus s aproximačným pomerom $r \Rightarrow$ **FPTAS**.

◇

5.2.5 Ilustračné príklady-SetCoverProblem a nekonštantný aproximačný pomer

Všetky doteraz prezentované aproximačné algoritmy pre ťažké optimalizačné problémy mali aproximačný pomer ohraničený konštantou. Patrili teda do triedy APX. Mohlo by sa zdať, že všetky optimalizačné problémy patria do tejto triedy. Nie je tomu ale tak. Ukážeme príklad problému, kde horný odhad na aproximačný pomer je neohraničene rastúca funkcia.

problém SCP

Začnime definíciou problému SCP-minimálneho pokrytia množinami

Vstup $(X, \mathcal{F})$, kde X je konečná množina,
$\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_m\}$ je systém množín, $\mathcal{F} \subseteq 2^X$, taký, že
$\bigcup_{F_i \in F} F_i = X$

Výstup $\{F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}\}$ také, že $X = \bigcup F_{i_j}$, k minimálne

Prirodzeným prístupom je aplikovanie greedy metódy, keď vyberáme množinu—kandidáta na zaradenie—ako tú, ktorá prinesiem maximálny počet doteraz nepokrytých prvkov. Nech

C je množina tých prvkov z $\mathcal{F}$, ktoré už boli zaradené do pokrytia a teda určujú množinu už pokrytých prvkov (C - cover)

U je množina ešte nepokrytých prvkov (U - uncovered)

Algoritmus 45 greedy - SCP

(pri výbere maximalizujeme počet prvkov z ešte nepokrytej časti množiny X)

1: $C \leftarrow \emptyset$ $C \subseteq F$ a na záver C bude riešenie
2: $U \leftarrow X$ $U \subseteq X, U = X - \bigcup_{Q \in C} Q$ pre aktuánu hodnotu C a na záver $U = \emptyset$
3: **while** $U \neq \emptyset$ **do**
4: nech $S \in F$ také, že $|S \cap U|$ je maximálne
5: $U \leftarrow U - S; C \leftarrow C \cup \{S\}$
6: return C

Veta 5.7 *Algoritmus greedy-SCP je*[5] $Har(\max\{|S|, S \in F\})$*-aproximačný algoritmus pre SCP.*

Dôkaz: Nech nájdené riešenie $C = \{S_1, \ldots, S_r\}$ je výstup v poradí algoritmu greedy-SCP, C^* označuje optimálne riešenie. Každému prvku $x \in X$ priradíme jeho váhu $w_c(x)$ vzhľadom k C ako 1/(počet nových prvkov, ktoré spolu s ním prišli do C)

$$\mathbf{w_C(x)} = \frac{1}{|S_i - (S_1 \cup \ldots \cup S_{i-1})|}, \quad x \in S_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} S_j$$

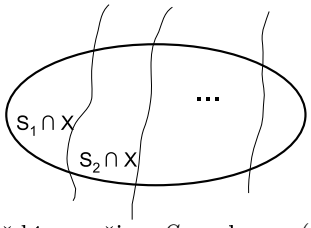
Označme $w_C(X) = \sum_{x \in X} w_C(x) = |C|$ Ukážeme, že

$$\forall S \in \mathcal{F} : \sum_{x \in S} w_C(x) \quad \leq \quad Har(|S|) \tag{5.1}$$

Z toho potom pre veľkosť greedy algoritmom vypočítaného výsledku dostaneme

[5] $Har(n) = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$

$$\begin{aligned} |C| = \textstyle\sum_{x\in X} w_C(x) &\leq \textstyle\sum_{S\in C^*}\sum_{x\in S} w_C(x) \\ &\leq \textstyle\sum_{S\in C^*} Har(|S|) \\ &\leq |C^*|Har(max\{|S|\}) \end{aligned}$$



dôkaz (5.1)

Teraz sa budeme venovať dôkazu faktu (5.1). Pre každú množinu S nech $cov_i(S)$ označuje počet prvkov množiny S, ktoré po i iteráciách ostali nepokryté

$$cov_i(S) = |S - (S_1 \cup \ldots \cup S_i)| \qquad \forall i = 1, \ldots |C|$$

Ľahko vidno, že

$$cov_0(S) = |S| \qquad cov_{|C|}(S) = 0 \qquad cov_i(S) \leq cov_{i-1}(S)$$

Uvedomme si, že v i-tej iterácii vyberáme takú množinu S_i, ktorá maximalizuje $|S_i - (S_1 \cup \ldots \cup S_{i-1})|$

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{x}\in\mathbf{S}} \mathbf{w_C(x)} &= \sum_{i=1}^{|C|}(cov_{i-1}(S) - cov_i(S)) \cdot \frac{1}{|S_i - (S_1 \cup \ldots \cup S_{i-1})|} \\ &\leq \sum_{i=1}^{|C|}(cov_{i-1}(S) - cov_i(S)) \cdot \frac{1}{|S - (S_1 \cup \ldots \cup S_{i-1})|} \\ &= \sum_{i=1}^{|C|}(cov_{i-1}(S) - cov_i(S)) \cdot \frac{1}{cov_{i-1}(S)} \\ &\quad (\text{využijeme } Har(b) - Har(a) = \sum_{i=a+1}^{b} \frac{1}{i} \geq (b-a)\cdot\frac{1}{b}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{|C|}(Har(cov_{i-1}(S)) - Har(cov_i(S))) \\ &= Har(cov_0(S) - Har(cov_{|C|}(S))) = Har(|S|) - Har(0) \\ &= \mathbf{Har}(|\mathbf{S}|) \end{aligned}$$

Ukázali sme, že alg SCP má aproximačný pomer $Har(max\{|S|\})$, a je teda príkladom *f(n)-aproximačného* algoritmu □

Dôsledok 5.8 *Algoritmus greedy-SCP je $ln(|X|)-$aproximačný algoritmus pre SCP.* *($\max\{|S|, S \in F\} \leq |X|, Har(d) < \ln d$)*

Dôsledok 5.9 *Algoritmus greedy-SCP je polynomiálny $ln(|X|)-$aproximačný algoritmus pre SCP.*

Dôkaz: Zakódujme vstup tak, aby sme mohli $|X||F|$ považovať za veľkosť vstupu (Ako?). Jedna iterácia kroku 3 trvá $O(|X||F|)$, počet opakovaní tohto kroku je $\min\{|X|, |F|\} \leq (|X||F|)^{1/2}$. Preto je zložitosť $O(n^{3/2})$.

□

Kapitola 6

Návrh aproximačných algoritmov

6.1 Ďalšie príklady

Pozrime na využitie metód pri návrhu aproximačných algoritmov. Už sme videli využitie greedy metódy pri probléme SetCover, spolu s naškálovaním sme greedy využili na získanie FPTAS pre KnapSack.

MinVCP a greedy Túto metódu môžme použiť aj pri riešení problému MinVCP, kde sa snažíme pokryť množinu hrán minimálnym počtom vrcholov. Videli sme, že pri presnom riešení metódou rozdeľuj-a-panuj je zložitosť exponenciálna. Greedy metóda poskytne polynomiálny aproximačný algoritmus. Idea je jednoduchá - budeme konštruovať množinu nezávislých hrán A a do množiny C, ktorá obsahuje vrcholy z výsledného pokrytia, budeme zaraďovať oba konce nezávislých hrán.

Algoritmus 46 greedy - MinVCP

(náhodne vyberieme hranu (u, v), oba konce zaradíme do pokrytia a z grafu odstránime všetky hrany, incidentné s u, v)

1: $C \leftarrow \emptyset$ //$C \subseteq V$ obsahuje vrcholy z pokrytia
2: $A \leftarrow \emptyset$ //$A \subseteq E$ sú hrany párovania[1]
3: $E' \leftarrow E$ //$E' \subseteq E$ je množina ešte nepokrytých hrán
4: **while** $E' \neq \emptyset$ **do**
5: náhodne zvoľ hranu $(u, v) \in E'$
6: $C \leftarrow C \cup \{u, v\}$
7: $A \leftarrow A \cup \{(u, v)\}$
8: $E' \leftarrow E'$-$\forall$ hrany susedné s u, v // $E' \leftarrow E' \setminus \{(x, y) | (x, y) \in E'; x \in \{u, v\}\}$
9: return C

Počet opakovaní while-cyklu je zhora ohraničený počtom hrán, pri rozumnej implementácii je celkový príspevok while cyklu $O(|E|)$.(Naprogramujte) *čas*

Z popisu je zrejmé, že vypočítané riešenie je prípustným riešením. Ľahko tiež vidno, že v priebehu algoritmu platí *kvalita*

$$2|A| = |C|$$

Keďže nezávislé hrany nemajú spoločné vrcholy, treba na ich pokrytie toľko vrcholov, koľko je hrán. Preto dolným odhadom na veľkosť pokrytia je maximálny počet nezávislých hrán. Nech $m^*(G)$ označuje cenu optimálneho riešenia, $m(G)$

cenu riešenia, ktoré vypočítal algoritmus 46; $m(G) = |C|$. Zrejme

$$m^*(G) \geq |A| = \frac{|C|}{2} \quad \rightsquigarrow |C| \leq 2m^*(G) \quad \rightsquigarrow \frac{m(G)}{m^*(G)} \leq 2$$

□

W-MinVCP a LP Zmeňme trochu zadanie. Pridáme vrcholom cenu $c : V \to \mathbb{R}^+$ a budeme hľadať také pokrytie C, ktoré minimalizuje $\sum_{v \in C} c(v)$. V tejto situácii vyššie popísaná greedy prístup nepomôže.

Úloha: Nech $r > 1$. Nájdite taký vstup do Algoritmu 46, aby pomer $\frac{m(G)}{m^*(G)}$ bol väčší ako r.

Použitie lineárneho programovania je v tomto prípade efektívnejšie.

Algoritmus 47 LP-W-MinVCP

1: vyjadríme ako úlohu 0/1-lineárneho programovania
2: zrelaxujeme na LP
3: vyriešime zrelaxovanú LP $\rightsquigarrow X = (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$
4: $S_X = \{v_i \mid x_i \geq 1/2\}$
5: return S_X

kvalita

Čo vieme povedať o kvalite získaného riešenia? S_X je prípustné riešenie, pretože ohraničenie $x_i + x_j \geq 1$ pre každú hranu $(v_i, v_j) \in E$ garantuje, že aspoň jedno z $x_i, x_j \geq 1/2$ a teda aspoň jeden z vrcholov v_i, v_j zaradíme do pokrytia.

Riešenie získané relaxáciou 0/1-LP na LP nemôže byť horšie ako riešenie pôvodného 0/1-LP, preto $m^*_{0/1-LP}(G) \geq m^*_{LP}(G)$ a následne

$$cena(S_X) = \sum_{v \in S_X} c(v) = \sum_{\substack{i: \\ x_i \geq 1/2}} c(v_i) \leq \sum_{\substack{i: \\ x_i \geq 1/2}} 2x_i c(v_i) = 2m^*_{LP}(G) \leq 2m^*_{0/1-LP}(G)$$

□

MaxCut

Maximálny hranový rez a lokálne prehľadávanie Ďalšou z metód, ktorú sme spomínali, je lokálne prehľadávanie. Použijeme túto metódu na riešenie problému maximálneho hranového rezu.

Vstup: $G = (V, E)$
Výstup: rozklad (V_1, V_2) taký, že $V_1 \cup V_2 = V,\ V_1 \cap V_2 = \emptyset$
maximalizujeme: počet hrán rezu: $|E \cap \{(u, v) \mid u \in V_1, v \in V_2\}|$

Pri aplikovaní metódy lokálneho prehľadávania začneme z nejakého prípustného riešenie, ktoré vylepšujeme prechodom do ďalšieho prípustného riešenia v jeho okolí. Začneme z triviálneho riešenie $(\emptyset, V)$. Okolím riešenia (X, Y) je také riešenie (X', Y'), ktoré z pôvoného vzniklo presunutím jedného vrchola z jednej množiny do druhej

Algoritmus 48 Search-MaxCut

1: $S \leftarrow \emptyset$ (rez budeme uvažovať ako $(S, V - S)$)
2: **while** $\exists v \in V$ taký, že presun v z jednej strany na druhú zvýšši cenu, **do**
3: realizuj tento presun
4: return $(S, V - S)$

zložitosť

Zamyslime sa nad zložitosťou algoritmu. Rrealizácia jedného opakovania while-cyklu trvá $O(|V|)$. POčet opakovaní je zhora ohraničený $|E|$ - každé opakovanie zvýši hodnotu aspoň o 1. Preto $O(|V||E|)$.

kvalita

Nech výstupom Algoritmu Search-MaxCut je (Y_1, Y_2). Pre každý vrchol $v \in Y_1$ platí, že má aspoň toľko susedov v Y_2 ako v Y_1(prečo?). Preto v reze je aspoň $\frac{|E|}{2}$ hrán. Keďže horný odhad na hodnotu optimálneho rezu je $|E|$

$$\frac{|E|}{2} \leq m(Y_1, Y_2) \leq m^* \leq |E| \leq 2m(Y_1, Y_2)$$

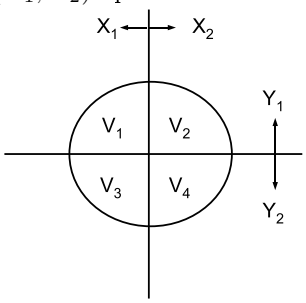
$$\frac{m^*}{m(Y_1, Y_2)} \leq \frac{2m(Y_1, Y_2)}{m(Y_1, Y_2)} = 2$$

Ľahko sme ukázali, že Algoritmus 48 má aproximačný pomer 2. Vieme spraviť aj presnejšiu analýzu tohto algoritmu?

Nech (Y_1, Y_2) je riešenie získané algoritmom a (X_1, X_2) optimálne riešenie.

Označme

$$V_1 = Y_1 \cap X_1$$
$$V_2 = Y_1 \cap X_2$$
$$V_3 = Y_2 \cap X_1$$
$$V_4 = Y_2 \cap X_2$$



e_{ij} počet hrán $|E \cap \{(x, y) \mid x \in V_i, y \in V_j\}|$

Potom

$$cena(X_1, X_2) = e_{12} + e_{14} + e_{23} + e_{34} \quad cena(Y_1, Y_2) = e_{13} + e_{14} + e_{23} + e_{24}$$

Uvažujme vrchol $x \in V_1$. Počet hrán medzi x a vrcholmi z $V_1 \cup V_2$ je nanajvýš taký, ako medzi x a vrcholmi z $V_3 \cup V_4$. Preto

$$2e_{11} + e_{12} \leq e_{13} + e_{14}$$

Analogicky pre vrcholy z V_2, V_3, V_4. Preto

$$2e_{11} + e_{12} \leq e_{13} + e_{14}$$
$$2e_{22} + e_{12} \leq e_{23} + e_{24}$$
$$2e_{33} + e_{34} \leq e_{23} + e_{13}$$
$$2e_{44} + e_{34} \leq e_{14} + e_{24}$$

Sčítaním a predelením 2 dostaneme

$$\begin{array}{rcll} \sum_{i=1}^4 e_{ii} + e_{12} + e_{34} & \leq & e_{23} + e_{24} + e_{13} + e_{14} & // + e_{14} + e_{23} \\ \sum_{i=1}^4 e_{ii} + e_{12} + e_{34} + e_{14} + e_{23} & \leq & 2(e_{23} + e_{14}) + e_{24} + e_{13} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} cena(X_1, X_2) &= e_{12} + e_{34} + e_{14} + e_{23} \leq \sum_{i=1}^4 e_{ii} + e_{12} + e_{34} + e_{14} + e_{23} \\ &\leq 2e_{23} + 2e_{14} + e_{24} + e_{13} \\ &\leq 2(e_{23} + e_{14} + e_{24} + e_{13}) = 2cena(Y_1, Y_2) \end{aligned}$$

Ak si uvedomíme, aké úpravy sme robili, dostávame

$$cena(X_1, X_2) + \sum_{i=1}^4 e_{ii} + e_{24} + e_{13} \leq 2cena(Y_1, Y_2)$$

resp.

$$cena(X_1, X_2) \leq 2cena(Y_1, Y_2) - \left(\sum_{i=1}^{4} e_{ii} + e_{24} + e_{13}\right)$$

Kvalita získaného riešenia je teda pre veľa vstupov oveľa lepšia.

□

6.2 ΔTSP

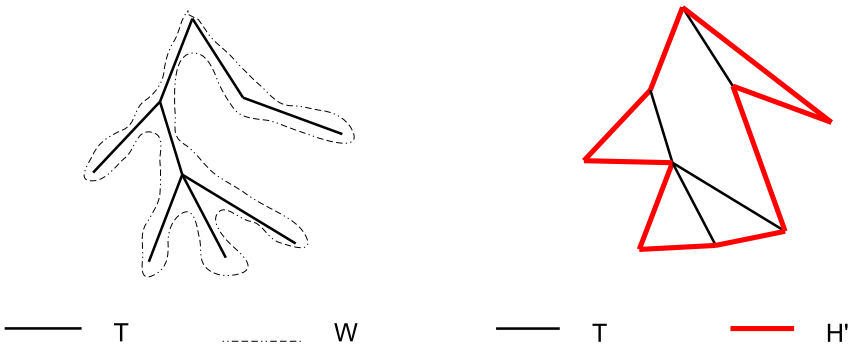
V tejto časti sa budeme venovať problému obchodného cestujúceho. Vieme, že tento problém sa nedá aproximovať s konštantnýn aproximačným pomerom. Ukážeme, že pre veľkú množinu vstupov algoritmus s konštantným aproximačným pomerom existuje. Ak budeme uvažovať také vstupy, kde pre veľkosti hrán platí trojuholníková nerovnosť, budeme hovoriť o probléme ΔTSP.

ΔTSP

Základom aproximačného algoritmu je minimálna kostra. Nech T je minimálna kostra v grafe G. Ak by sme "obišli" hrany T, dostali by sme uzavretú cestu W, ktorej cena by bola rovná $2|Y|$. Ako z tejto uzavretej cesty získame kružnicu? Stačí začať kráčať po W a vynechávať tie vrcholy, v ktorých sme už boli. Jedinou výnimkou je vrchol, v ktorom sme začínali.

Algoritmus 49 ΔTSP

1: nájdi minimálnu kostru T
2: vyber vrchol kostry v a začni prehľadávanie do hĺbky, pri ktorom vytváraj postupnosť H vrcholov tak, ako ich objavuješ
3: return $H' = H, v$



čas

Minimálnu kostru zostrojíme v čase $O(|E|)$, z nej požadovanú kružnicu H' v čase $O(n)$. Algoritmus je teda polynomiálny.

kvalita

Čo vieme povedať o kvalite? Nech H^* označuje HK s optimálnou cenou

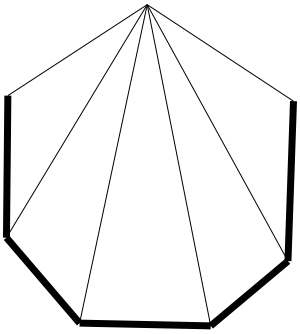
1. Odobratím hrany z hamiltonovskej kružnice získame kostru, preto $\sum_{e \in T} c(e) = cena(T) \leq cena(H^*)$
2. $cena(W) = 2cena(T) \leq 2cena(H^*)$
3. H' vznikla z W nahradením cesty hranou; z platnosti trojuholníkovej nerovnosti vyplýva, že táto hrana je kratšia ako cesta. Preto

$$cena(H') \leq cena(W) \leq 2cena(H^*)$$

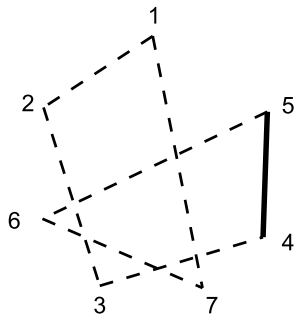
□

Ako ukazuje nasledujúci príklad, analýza algoritmu sa vylepšiť nedá.

Príklad 6.1 *Uvažujme úplný graf o n vrcholoch, v ktorom sú všetky hrany až na $n-2$ ceny 1, tých $n-2$ má cenu 2. Na obrázku sú hrany s cenou 2 vyznačené hrubšou čiarou*



minimálna kostra a kružnica vypočítaná algoritmom



optimálna kružnica

minimálna kostra má cenu $n-1$, cena H' je $2(n-2)+2 = 2n-2$, pritom optimálna kružnica má cenu $n+1$

$$\frac{2n-2}{n+1} \longrightarrow 2$$

◇

Aproximačný pomer 2 sme dosiahli preto, že sme HK vytvárali z kružnice, ktorá bola dvojnásobnej dĺžky ako minimálna kostra. Skúsme minimálnu kostru T doplniť minimálnym počtom hrán tak, aby bol Eulerovský–aby vo vzniknutom grafe existovala kružnica. Keďže:

– v grafe je počet vrcholov nepárneho stupňa párny

– graf je Eulerovský práve vtedy ak je každý vrchol párneho stupňa

získame Eulerovský graf z minimálnej kostry T pridaním úplného párovania medzi vrcholmi nepárneho stupňa. Toto je idea Christofidesovho algoritmu.

Algoritmus 50 Christofides-ΔTSP

1: nájdi minimálnu kostru T
2: $S = \{v \in V \ | deg_T(v)$je nepárny$\}$
3: párovanie M minimálnej ceny na S (hranami v G)
4: $G' = (V, E(T) \cup M)$, v ňom eulerovský ťah ω
5: hamiltonovská kružnica H v G vznikne z ω tak, že vynechávame vrcholy, ktoré už boli navštívené (s výnimkou prvého vrchola, do ktorého sa vrátime)
6: return H

čas

Začnime analýzou času.

– minimálnu kostru spravíme v $O(|E|)$

– minimálne párovanie sa dá spraviť v $O(n^2|E|)$

– eulerovský ťah nájdeme v $O(n)$

– HK vyrobíme v $O(n)$

kvalita

H označuje výstup algoritmu, H^* je optimálna HK kružnica, ω je eulerovský ťah. Zrejme platí:

$$cena(H) \leq cena(\omega) = cenat(T) + cena(M)$$

Keďže H^* je HK, vynechaním hrany z nej získame kostru, ktorá nemôže mať lepšiu cena ako minimálna kostra

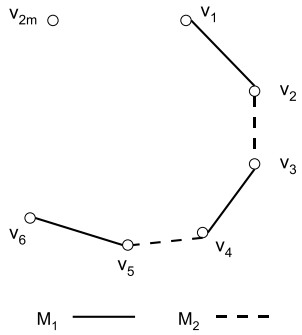
$$cena(T) \leq cena(H^*)$$

Sústredíme sa teda na odhad ceny párovania M. Nech $S = \{v_1, \ldots, v_{2m}\}$ sú vrcholu kostry T nepárneho stupňa, pričom

$$H^* = v_1, \alpha_1, v_2\alpha_2, \ldots, v_{2m}, \alpha_{2m}, v_1$$

Uvažujme 2 konkrétne párovania M_1, M_2, ktoré spoločne vytvárajú kružnicu prechádzajúcu všetkými vrcholmi z S:

M_1 : $(v_1, v_2), (v_3, v_4), \ldots, (v_{2m-1}, v_{2m})$
M_2 : $(v_2, v_3), (v_4, v_5), \ldots, (v_{2m}, v_1)$



Vzhľadom k trojuholníkovej nerovnosti
$cena(v_1, \alpha_i, v_{i+1}) \geq cena(v_i, v_{i+1})$
a preto

$$\begin{aligned} cena(H^*) &\geq \sum_{i=1}^{2m} cena(v_i, v_{i+1}) \\ &= cena(M_1) + cena(M_2) \end{aligned}$$

Vieme, že M_1, M_2, M sú všetko úplné párovania(perfect matching), pritom M s minimálnou cenou, a teda

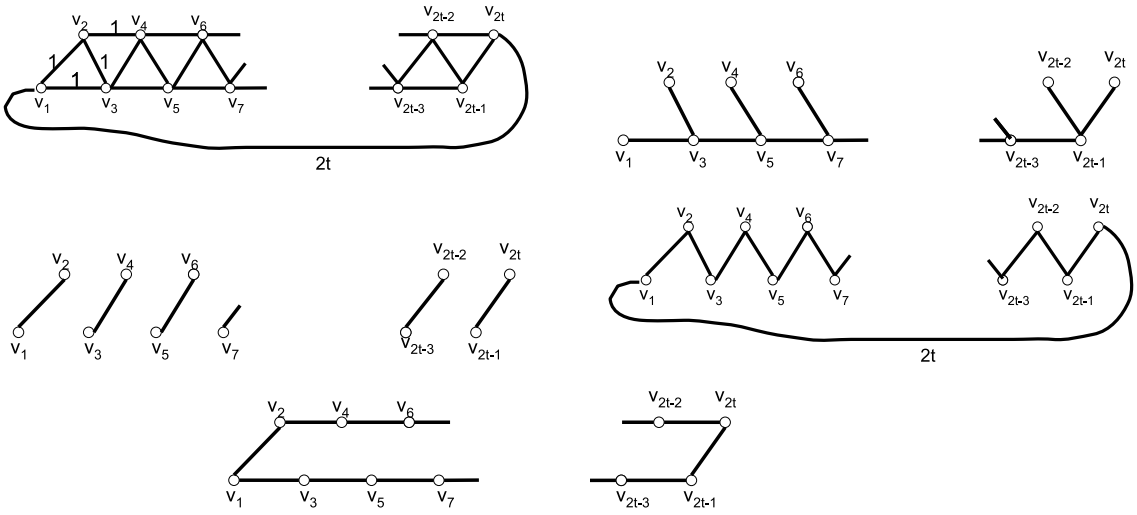
$$cena(M) \leq \min\{cena(M_1), cena(M_2)\} \leq \frac{cena(M_1) + cena(M_2)}{2} \leq \frac{cena(H^*)}{2}$$

Spojením dostávame

$$cena(H) \leq cena(T) + cena(M) \leq cena(H^*) + \frac{cena(H^*)}{2} = \frac{3}{2} cena(H^*)$$

□

Opäť existuje príklad vstupu, pri ktorom sa "dosahuje" hranica aproximačného pomeru 3/2.



6.3 Stabilizácia

Už vieme, že nie všetky optimalizačné problémy sa dajú vo všeobecnosti rozumne aproximovať. Naproti tomu existujú také množiny vstupov, na ktorých vieme garantovať rozumnú aproximáciu. Je preto prirodzenou snahou hľadanie odpovede na otázku – Kde je hranica zvládnuteľné $\longleftrightarrow$ nezvládnuteľné?

FPTAS, PTAS - väčšinou dobré, ale geometrický TSP má PTAS $n^{40\cdot\epsilon^{-1}}$

$\log n$ **aproximácia -** môže byť praktická

NPO(V) - sú vlastne *nezvládnuteľné*. Vieme totiž, že ak existuje polynomiálny $f(n)-$aproximačný algoritmus, tak za rozumných predpokladov (napr. $P \neq NP$) $f(n))$ nie je ohraničená polylogaritmickou fciou. Napríklad problém TSP

Zameriame sa na hľadanie toho, kde *je* to zvládnuteľné. Majme optimalizačný problém s dvoma rôznymi množinami vstupov I_1 a I_2, $I_1 \subsetneq I_2$. Navyše,

- pre I_1 *existuje* polynomiálny Δ-aproximačný algoritmus $\mathcal{A}$, $\Delta > 1$
- pre I_2 *neexistuje* žiaden polynomiálny $\gamma-$ aproximačný algoritmus, $\gamma > 1$ (ak $P \neq NP$).

Je situácia naozaj tak zlá, že algoritmus $\mathcal{A}$ možno rozumne použiť len pre vstupy z I_1? Nedokážeme použitím algoritmu $\mathcal{A}$ na inej množine vstupov garantovať pre tieto vstupy žiaden aproximačný pomer?

Nasledujúce pojmy sú snahou o zachytenie vlastností, ktoré v niektorých prípadoch pomôžu túto otázku zodpovedať. Snažíme sa zachytiť vlastnosť vstupu, ktorá nejakým spôsobom určuje/garantuje aproximačný pomer aj v prípade, že "dobrý" aproximačný algoritmus nebol použitý na "ideálnych" vstupoch.

Zadefinujme vzdialenosť d pre $x \in I_2 - I_1$. Ideálne by bolo, keby bol algoritmus taký, že dokážeme vyjadriť jeho kvalitu v závislosti od vzdialenosti prislušného vstupu od "dobrých" vstupov. Chceli by sme, aby $\forall k > 0$, $\forall x : d(x) \leq k$ $\mathcal{A}$ vypočítal $\gamma(k, \Delta) -$ aproximáciu $m^*(x)$. Ak to bude pravda povieme, že algoritmus $\mathcal{A}$ je *stabilný vzhľadom k d.*

vzdialenosť, stabilita, kvázistabilita

Definícia 6.1 *$U = (I, Sol, m, ciel)$, $U' = (I', Sol, m, ciel)$, $I \subsetneq I'$ Hovoríme, že* ***vzdialenosť pre*** $\mathbf{U'}$ ***vzhľadom k*** $\mathbf{I}$ *je funkcia $h_{I'} : I' \to \mathbb{R}^{\geq 0}$*

- *$h_{I'}(x) = 0$ $\forall x \in I$*
- *$h_{I'}(x)$ je vypočitateľná v polynomiálnom čase*

Nech h je vzdialenosť pre U' vzhľadom k I. Potom

$$\mathbf{Ball_{r,h}(I)} = \{w \in I' \mid h(w) \leq r\}$$

Nech A je $\epsilon-$aproximačný algoritmus, $p \in R^{>0}$. Hovoríme, že algoritmus $\mathbf{A}$ ***je***

p-stabilný podľa h *ak $\forall 0 < r \leq p$ existuje konštanta $\delta_{r,\epsilon} \in R^{>0}$ tak, že $\mathcal{A}$ je $\delta_{r,\epsilon} -$ aproximačný pre $U_r = (Ball_{r,h}(I), Sol, m, ciel)$*

je stabilný podľa h *ak je p-stabilný podľa h $\forall p \in R^+$*

je nestabilný podľa h *ak neexistuje $p \in R^{>0}$, aby bol p-stabilný podľa h*

$(\mathbf{r}, \mathbf{f_r(n)})-$ **kvázistabilný podľa h** *ak existujú $r \in Z^+, f_r : \mathbb{N} \to R^{>1}$ tak, že $\mathcal{A}$ je $f_r(n)-$aproximačný pre $U_r = (Ball_{r,h}(I), Sol, m, ciel)$*

Vieme, že ΔTSP je "dobrým" prípadom všeobecného problému TSP. Budeme sa snažiť využiť algoritmus pre tento dobrý prípad; konkrétne si budeme všímať jeho kvalitu, keď ho aplikujeme na vstupy v nejakej vzdialenosti od dobrého prípadu. Začneme definovaním viacerých vzdialeností. Všímame si pritom pomer dĺžky jednej hrany k dĺžke cesty, ktorá spája príslušné koncové vrcholy, keď táto cesta má alebo nemá obmedzenie na počet hrán. Toto je dôležité v prípade, keď vstupy nespĺňajú trojuholníkovú nerovnosť.

Nech $I-$ označuje všetky grafy , $I_\Delta-$ iba grafy s trojuholníkovou nerovnosťou.

dist$(\mathbf{G},\mathbf{c})$ umožňuje nahradiť hranu cestou, ktorá je tvorená dvomi hranami

$$dist(G,c) = \max\left\{0, \max\left\{\frac{c(u,v)}{c(u,p)+c(p,v)} - 1 | u,v,p \in V(G), p \neq u \neq v \neq p\right\}\right\}$$

dist$_\mathbf{k}$ $(\mathbf{G},\mathbf{c})$ umožňuje nahradiť hranu cestou, ktorá je tvorená nanajvýš k hranami

$$dist_k(G,c) = \max\left\{0, \max\left\{\frac{c(u,v)}{\sum_{i=1}^{m} c(p_i,p_{i+1})} - 1 \mid u = p_1, p_2, \ldots, p_m = v; m-1 \leq k\right\}\right\}$$

distance$(\mathbf{G},\mathbf{c})$ umožňuje nahradiť hranu cestou ľubovoľnej dĺžky

$$distance(G,c) = \max\{dist_k(G,c) \mid 2 \leq k \leq |V(G)| - 1\}$$

Fakt 6.1 *Nech $Ball_{r,dist}(I_\Delta)$ označuje množinu tých grafov, v ktorých $\forall u \neq v$ platí $c(u,v) \leq (1+r)(c(u,p)+c(p,v))$. Ak $dist_k(G,c) \leq r$ potom každé priame spojenie medzi u,v je nanajvýš $(r+1)$krát cena ľubovoľnej cesty medzi u,v, ktorá obsahuje maximálne k hrán.*

Analogicky k pojmu stabilného algoritmu môžme definovať pojem stabilnej, resp. super-stabilnej schémy.

Definícia 6.2 *$U = (I, Sol, m, ciel)$, $U' = (I', Sol, m, ciel)$, $I \subsetneq I'$. Nech h je vzdialenosť pre $\mathbf{U}'$ vzhľadom k I, a nech $A = \{A_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ je PTAS pre U.*

Uvažujme rozšírenie U na $U_r = (Ball_{r,h}(I), Sol, m, ciel)$. Ak $\forall r > 0, \epsilon > 0$ A_ϵ je $\delta_{r,\epsilon}$-aproximačný pre U_r, tak ***PTAS* A *je stabilná podľa h.***

Ak $\delta_{r,\epsilon} \leq f(\epsilon) \cdot g(r)$, kde

- $f, g : R^{\geq 0} \to R^{>0}$
- $\lim_{\epsilon \to \infty} f(\epsilon) = 0$

Potom ***PTAS* A *je superstabilná podľa h.***

Ako vyplýva z nasledujúceho faktu, h super-stabilná PTAS poskytuje PTAS na väčšej množine vstupov, ktorá je definovaná pomocou vzdialenosti h.

Fakt 6.2 *Ak A je superstabilná PTAS pre problém $(I, Sol, m, ciel)$, tak A je PTAS pre $(Ball_{r,h}(I), Sol, m, ciel)$*

Úloha: Dokážte Fakt 6.2.

stabilita Christofidesa

Teraz ukážeme, že Algoritmus$^\circ$50 je stabilným vzhľadom k *distance*. Označme $\Delta TSP_r = (Ball_{r,dist}, Sol, cena, \min)$

Lema 6.3 *Christofides je stabilný vzhľadom k distance*

Dôkaz: Majme vstup $I = (G,c) \in Ball_{r,distance}(I), r \in \mathbb{R}^{>0}$. Pri realizácii algoritmu postupne vytvárame

- minimálnu kostru T , perfect matching minimálnej ceny M(pre potreby analýzy uvažujeme konkrétne matchngy M_1, M_2)
- Eulerovskú cestu $\omega = v_1, \alpha_1, v_2, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, v_1$
- je HK $H = v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1} = v_1$, ktorá vznikla vynechaním už navštívených vrcholov

Keďže vstupy sú z $Ball_{r,distance}(I)$, platí

$$cena(v_i, v_{i+1}) \leq (1+r)cena(v_i, \alpha_i, v_{i+1})$$

a potom dosadením

$$cena(H) \leq (1+r) \cdot cena(\omega)$$

$$cena(H) = cena(T) + cena(M)$$

$$cena(H^*) \geq \frac{1}{r+1}[cena(M_1) + cena(M_2)] \geq \frac{2}{(r+1)}M$$

$$cena(\omega) = cena(T) + cena(M) \leq cena(H^*) + (r+1)cena(H^*) = (r+2)cena(H^*)$$

$$cena(H) \leq (1+r)cena(\omega) \leq (1+r)(2+r)cena(H^*)$$

□

Dôsledok 6.4 *$\forall r > 0$ je Christofides $(1+r)(2+r)-$ aproximačný algoritmus polynomiálnej zložitosti pre $(Ball_{r,distance}(I_\Delta), Sol, cena, \min)$*

Pri inej vzdialenosti, konkrétne *dist*, je Christofidesov algoritmus kvázistabilný.

Lema 6.5 *$\forall r \in \mathbb{R}^{>0}$ je Christofides $(r, O(n^{\log_2(1+r)^2}))-$kvázistabilný pre* dist

Dôkaz: Majme vstup $I = (G, c) \in Ball_{r,dist}(I_\Delta)$, T, M, ω, H sú minimálna kostra, minimálny perefect matching, eulerovská cesta a HK podľa Christofidesovho algoritmu.

Všimnime si, čo vzhľadom k definovanej vzdialenosti [2] *dist* môžme povedať o cenách jednotlivých častí po nahradení cesty v, α, u hranou (v, u). $v, \alpha, u \longrightarrow (v, u)$

1. pre každú trojicu vrcholov $p, s, t \in V(G)$ platí $c(p,t) \leq (r+1)c(p,s,t)$
2. nech cesta Pu, α, v mala pôvodne m hrán
   - skrátenie[3] $m \to \lceil m/2 \rceil$ prináša multiplikatívny nárast $\times(r+1)$
   - po $\log_2 m$ skracovaniach máme cestu dĺžky 1
   - výsledkom skracovania cesty u, α, v je teda hrana (u, v) o cene ktorej platí $cena(u, v) = c(u, v) \leq (1+r)^{\lceil \log_2 m \rceil} \cdot cena(u, \alpha, v)$
3. vzhľadom k (1) pre vzťahy dĺžok $cena(H^*), cena(M)$ a $cena(H), cena(\omega)$ platí

$$cena(H) \leq (1+r)^{\lceil \log_2 n \rceil} \cdot cena(\omega)$$

$$cena(M) \leq \frac{1}{2}(1+r)^{\lceil \log_2 n \rceil} \cdot cena(H^*)$$

[2] $dist(G,c) = \max\left\{0, \max\left\{\frac{c(u,v)}{c(u,p)+c(p,v)} - 1 | u, v, p \in V(G), p \neq u \neq v \neq p\right\}\right\}$

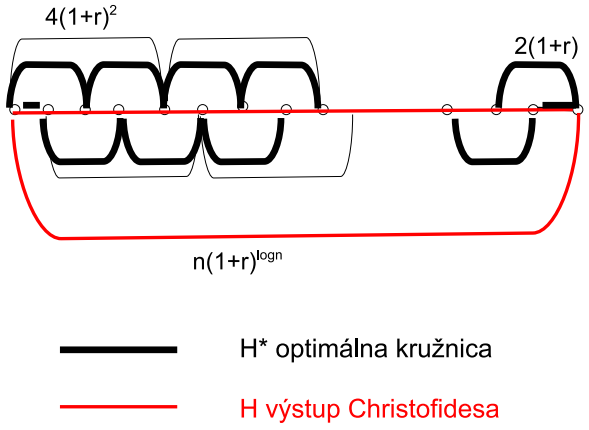
[3] skrátením rozumieme nahredením cesty p, s, t hranou pt postupne pre všetky trojice na ceste u, α, v

Spojením dostávame:

$$\begin{aligned} cena(H) &\leq (1+r)^{\lceil \log_2 n \rceil} cena(\omega) = (1+r)^{\lceil \log_2 n \rceil}(cena(T) + cena(M)) \\ &\leq (1+r)^{\lceil \log_2 n \rceil}[cena(H^*) + \tfrac{1}{2}(1+r)^{\lceil \log_2 n \rceil} cena(H^*)] \\ &= (1+r)^{\lceil \log_2 n \rceil}\left(1 + \tfrac{1}{2}(r+1)^{\log_2 n}\right) cena(H_{opt}) \\ &= O\left(n^{\log_2 (1+r)^2} \cdot cena(H^*)\right) \end{aligned}$$

□

Na obrázku je príklad grafu-vstupu do Christofidesovho algoritmu. Hrubou(čiernou) čiarou je naznačené optimálne riešenie, zatiaľ čo strednou(červenou) garbou je zvýraznené riešenie vypočítane Christofidesovým algoritmom.



Pre aproximačný pomer platí:

$$\frac{cena(D)}{cena(H_{opt})} = \frac{n - 1 + n(1+r)^{\log n}}{2 + 2(1+r)(n-2)} \geq \frac{n^{\log_2(1+r)}}{2(1+r)}$$

Dokázali sme tak nasledujúcu leme.

Lema 6.6 $\forall r \in \mathbb{R}^+$, *ak Christofides je* $(r, f_r(n))-$ *kvázistabilný pre* dist, *tak*

$$f_r(n) \geq \frac{n^{\log_2(1+r)}}{2(1+r)}$$

Môže úpravou dostať stabilitu pre dist? Zamyslime sa, čo spôsobilo, že Christofidesov algoritmus nie je stabilný vzhľadom k *dist*. Bolo to preto, že pri vytváraní kružnice H z eulerovskej cesty ω sme nahrádzali hranou potenciálne dlhé cesty. Ak by sa nám podarilo vytvoriť takú cestu, z ktorej by k redukcii na HK stačilo odstraňovať cesty *dokázateľne* krátke, mohlo by to pomôcť.

Algoritmus Sekanina zabezpečil odstraňovanie dlhých ciest z eulerovského ťahu. Postupne vysvetlíme ideu algoritmu a tiež dôkaz jeho korektnosti:

- Ku každému stromu $T = (V, E)$ môžme vytvoriť graf T^k, ktorý vznikne doplnením hrán, spájajúcich–po hranách T– vrcholy vo vzdialenosti k. Ukážeme, že k minimálnej kostre T zostrojený graf $T^3 = (V, \{(x,y) | \exists \text{ cesta } x, P, y \text{ dĺžky max.3}\})$ obsahuje HK
- Odhadneme dĺžku cesty $P_H(U) = u_1, P_{u_1,u_2}, u_2, \ldots, u_n, P_{u_n.u_1}$ v T vzhľadom k HK $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ v T^3
- Ukážeme, že sa to dá spraviť tak, že každá hrana z T sa v $P(H)$ objaví dvakrát.

$P_T(U)$

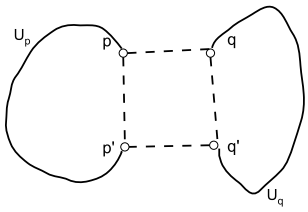
Definícia 6.3 *Nech T je strom, $\forall(u,v) \in E(T)$ nech $P_{u,v}$ je jediná cesta v strome T medzi vrcholmi u, v. Nech $U = u_1, \ldots, u_m$ je jednoduchá cesta v T^k. Potom U-cesta v T je*

$$P_T(U) = u_1, P_{u_1,u_2}, u_2, \ldots, P_{u_{m-1},u_m}, u_m$$

A teraz už kľúčová lema pre algoritmus Sekanina.

Lema 6.7 *$T, n \geq 3, (p,q) \in E(T)$ Potom T^3 obsahuje Hamiltonovskú cestu U : $p{=}v_1, v_2, \ldots, v_n{=}q$ takú, že každá hrana z $E(T)$ sa v $P_T(H)$ vyskytuje presne dvakrát, pričom $H = U, p$ je HK v T^3*

Dôkaz: (Náčrt)Spravíme indukciu vzhľadom na počet vrcholov v T. (Bázu indukcie ako cvičenie)
Vezmime hranu $(p,q) \in E(T)$ a odstráňme ju zo stromu T. Dostaneme dva podstromy T_p, T_q s koreňom v p, resp. q; $T = T_p \cup T_q \cup (p,q)$.



Nech p' je sused p v T_p, ak existuje. Analogicky q'.

Skonštruujeme hamiltonovské cesty U_p v T_p^3 a U_q v T_q^3. Pri konštrukcii rozlišujeme 3 prípady.

1. Ak $|V(T_p)| = 1$, potom $U_p = p = p'$
2. Ak $|V(T_p)| = 2$, potom $U_p = (p, p')$
3. Ak $3 \leq |V(T_p)| \leq n-1$, potom využije IP. Nech U_p je hamiltonovská cesta z p do p' v T_p^3. Pritom $P(U_p, p)$ obsahuje každú hranu z $E(T_p)$ práve trikrát. Analogicky U_q, $P(U_q, q)$.

Keďže p', p, q, q' je cesta v T, hrana $(p', q') \in E(T^3)$. Preto U_p, q', U_q^R je hamiltonovská cesta v T^3 a $H = U_p, q', U_q^R, p$ je hamiltonovská kružnica v T^3.

Ostáva ukázať, že každá hrana z T je v H práve dvakrát.
Opäť IP. U_p, p obsahuje každú hranu z $E(T_p)$ práve 2krát, preto U_p obsahuje každú hranu z $E(T_p \setminus (p,p'))$ dvakrát a hranu (p,p') práve raz. Analogicky pre hrany cesty U_q. Spolu teda máme:

- $\hookrightarrow$ až na hrany $(p,p'), (q,q'), (p,q)$ sú všetky hrany práve 2krát
- $\hookrightarrow$ hrany (p,p') a (q,q') máme raz
- $\hookrightarrow$ hrana (p,q) sa v $U_p \cup U_q$ nevyskytuje
- $\hookrightarrow$ Prepojenie hamiltonovských ciest U_p a U_q^R do kružnice prináša v T existujúcu hranu (p,q) a v T neexistujúcu hranu (p',q'), ktorá reprezentuje v T jedinú cestu medzi vrcholmi p' a q': $p' \rightsquigarrow p \rightsquigarrow q \rightsquigarrow q'$. To prinieslo hrany $(p',p), (p,q), (q,q')$.

□

Veta 6.8 *Algoritmus Sekanina je 2-aproximačný pre ΔTSP*

Dôkaz: Korektnosť algoritmu vyplýva z predchádzajúcich úvah a tvrdení. *korektnosť*

Konštrukcia minimálnej kostry T a následne aj grafu T^3 sa realizuje v čase $O(n^2)$ (naprogramujte). Konštrukcia H je podľa lemy 6.7 v čase $O(n)$ *čas*

cena

Algoritmus 51 Sekanina

vstup: $G = (V, E), c : E \to N^+$

1: konštrukcia minimálnej kostry T
2: konštrukcia T^3
3: HK v T^3 taká, že $P_T(H)$ obsahuje každú hranu z $E(T)$ dvakrát
4: return(H)

1. T je minimálna kostra, preto $cena(T) \leq cena(H^*)$
2. H vznikla ako skracovanie cesty $P_T(H)$, v ktorej sa každá hrana z T objavuje dvakrát. Preto
$$cena(P_T(H)) = 2cena(T) \leq 2cena(H^*$$
3. H vznikla nahrádzaním $u_iP_iu_{i+1}$ hranou u_iu_{i+1}. Keďže platí trojuholníková nerovnosť,
$$cena(H) \leq cena(P_T(H))$$

Spojením dostávame

$$cena(H) \leq cena(P_T(H)) \leq 2cena(H^*$$

□

Označme $\Delta TSP_r = (Ball_{r,dist}(L_\Delta), Sol, cena, min)$. Ľahko sa ukáže, že algoritmus 51 je $2(1+r)^2-$aproximačný pre ΔTSP_r, a teda stabilný vzhľadom k *dist*.

stabilita pre dist

Veta 6.9 *Algoritmus 51 je pre ΔTSP_r, $r \in \mathbb{R}^+$, $2(1+r)^2-$aproximačný*

Dôkaz: Majme vstup $I = (G, c) \in \Delta TSP_r$. Keďže $(G, c) \in Ball_{r,dist}(L_\Delta)$, tak

$$\begin{aligned} c(v_1, v_4) &\leq (1+r)^2 \cdot cena(v_1, v_2, v_3, v_4) \\ c(u_1, u_3) &\leq (1+r) \cdot cena(u_1, u_2, u_3) \end{aligned}$$

Nahrádzame cestu $u_iP_iu_{i+1}$ hranou, preto

$$cena(H) \leq (1+r)^2 cena(P_T(H)) \leq 2(1+r)^2 cena(H^*)$$

□

Dôsledok 6.10 *Algoritmus Sekanina je stabilný pre dist.*

zosilnená trojuholníková nerovnosť

Definícia 6.4 *Nech (G, c) je vstup do TSP, $1 > p \geq 1/2$. Hovoríme, že (G, c) spĺňa podmienku p-zosilnenej trojuholníkovej nerovnosti (str(p)), ak*

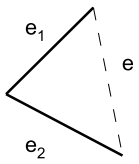
$$\forall u, v, w \quad c(u, v) \leq p \cdot [c(u, w) + c(w, v)]$$

Uvedomme si, že ak $p = 1/2$ tak všetky hrany, a teda aj všetky HK sú rovnako dlhé. Našou snahou je ukázať, že algoritmus CXhristofides je stabilný pre vstupy, na ktorých platí $str(p)$.

Označme teda
- $\Delta TSP_{p-1} = (I_{str(p)}, Sol, cena, min)$ verziu TSP na vstupoch, kde platí $str(p)$
- $c_{min}(G) = \min\{c(e) \mid e \in E\}$
- $c_{max}(G) = \max\{c(e) \mid e \in E\}$

Lema 6.11 *Nech* $1/2 \leq p < 1$ *a* $(G,c) \in \Delta TSP_{p-1}$. *Potom*

1. $\forall$ *susediace* e_1, e_2 $\quad cena(e_1) \leq \frac{p}{1-p} cena(e_2)$
2. $c_{max}(G) \leq \frac{2p^2}{1-p} \cdot c_{min}(G)$



Dôkaz:

1. K dôkazu prvej časti lemy uvažujme aj dodatočnú(možno neexistujúcu) hranu e. Keďže platí zosilnená trojuholníková nerovnosť, môžme písať:

$$\begin{aligned} c(e_1) &\leq p[c(e_2) + c(e)] \leq p[c(e_2) + p(c(e_1) + c(e_2))] \\ &= pc(e_2) + p^2 c(e_1) + p^2 c(e_2) \\ c(e_1)(1-p^2) &\leq c(e_2)(p+p^2) \\ c(e_1) &\leq c(e_2)\frac{p(1+p)}{(1-p)(1-p)} = c(e_2)\frac{p}{1-p} \end{aligned}$$

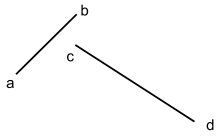
2. Nech $(a,b),(c,d)$ sú tie hrany, pre ktoré $c(a,b) = c_{min}(G), c(c,d) = c_{max}(G)$. Rozlíšime dva prípady podľa toho, či hrany $(a,b),(c,d)$ majú spoločný bod alebo nie:

- ak spoločný bod majú, tak

$$c_{max}(G) \overset{lema(1)}{\leq} \frac{p}{1-p} c_{min}(G) \overset{1/2 \leq p < 1}{\leq} \frac{2p^2}{1-p} c_{min}(G)$$

- ak spoločný bod nemajú, tak využitím už dokázanej časti 1.

$$\begin{aligned} c(a,c) &\leq \tfrac{p}{1-p} c(a,b) = \tfrac{p}{1-p} c_{min}(G) \\ c(a,d) &\leq \tfrac{p}{1-p} c(a,b) = \tfrac{p}{1-p} c_{min}(G) \\ c(c,d) &\leq p\left((c(a,c) + c(a,d))\right) \leq p \cdot 2 \cdot \tfrac{p}{1-p} c_{min}(G) \end{aligned}$$



□

Dôsledok 6.12 *Každá HK* H *v* ΔTSP_{p-1} *spĺňa*

$$\frac{cena(H)}{opt_{TSP}(G,c)} \leq \frac{2p^2}{1-p}$$

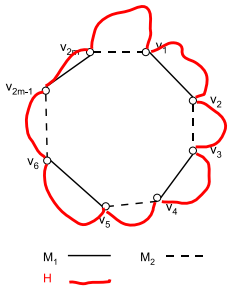
Veta 6.13 $\forall 1/2 \leq p < 1$ *je Christofidesov algoritmus* $\left(1 + \frac{2p-1}{3p^2-2p+1}\right)$*−aproximačný pre* ΔTSP_{p-1}

Dôkaz: Pri konštrukcii HK H algoritmom Christofides možno identifikovať dve skracovania

- jedno skracovanie je pri extrakcii HK H z eulerovského ťahu ω
- uvedomme si, že aj párovanie M možno chápať ako skracovanie HK

Ak má M málo hrán, šetríme pri párovaní, ak je $|M|$ veľká, šetríme pri skracovaní eulerovského ťahu. Poďme odhadnúť, koľko. Zopakujme si označenia z Christofidesovho algoritmu.

H výstup CHA pri vstupe $(G,c) \in \Delta TSP_{p-1}$
ω Eulerovský ťah
$\mathbf{H}^*$ optimálne riešenie
T minimálna kostra
$v_1, v_2, \ldots, v_k, k = 2m$ vrcholy nepárneho stupňa v T s indexami v takom poradí ako sa vyskytujú v H^*
$\mathbf{M_1}$ $v_1v_2, v_3v_4, \ldots$
$\mathbf{M_2}$ $v_2v_3, v_4v_5, \ldots$



$$cena(H^*) \geq cena(M_1) + cena(M_2) + (n-k)(1-p)2c_{min}(G)$$

$$\begin{aligned} cena(M) &\leq \tfrac{1}{2}(cena(M_1) + cena(M_2)) \\ &\leq \tfrac{1}{2}cena(H^*) - (n-k)(1-p)c_{min}(G) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cena(T) &\leq cena(H^*) - c_{min}(G) \leq \\ &\leq cena(H^*) - (1-p)\cdot 2 \cdot c_{min}(G) && //2(1-p) \geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cena(\omega) &= cena(T) + cena(M) \\ &\leq cena(H^*) - 2(1-p)c_{min}(G) + \tfrac{1}{2}cena(H^*) - (n-k)(1-p)c_{min}(G) \\ &= \tfrac{3}{2}cena(H^*) - (1-p)c_{min}(G)(2+n-k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cena(H) &\leq cena(\omega) - \left(\tfrac{k}{2} - 1\right)(1-p)\cdot 2c_{min}(G) && //\omega \text{ má } n-1+k/2 \text{ hrán} \\ &\leq \tfrac{3}{2}cena(H^*) - (1-p)c_{min}(G)(2+n-k) - (1-p)\cdot 2c_{min}(G)\left(\tfrac{k}{2}-1\right) \\ &= \tfrac{3}{2}cena(H^*) - (1-p)c_{min}(G)[2+n-k+k-2] \\ &= \tfrac{3}{2}cena(H^*) - (1-p)c_{min}(G)\cdot n && //c_{max} \leq \tfrac{2p^2}{1-p}c_{min}(G) \\ &\leq \tfrac{3}{2}cena(H^*) - \tfrac{(1-p)^2}{2p^2}c_{max}(G)\cdot n \end{aligned}$$

Nech $\Gamma = \{\gamma \geq 1 \mid cena(H) \leq \gamma \cdot cena(H^*) \leq n \cdot c_{max}\}$
$\forall \gamma \in \Gamma$: $cena(H) \leq \frac{3}{2}cena(H^*) - \frac{(1-p)^2}{2p^2}\cdot\gamma\cdot cena(H^*) = \left(\frac{3}{2} - \gamma\cdot\frac{(1-p)^2}{2p^2}\right)cena(H^*)$

$cena(H) \leq \min\{\min\{\gamma, \frac{3}{2} - \gamma\cdot\frac{(1-p)^2}{2p^2}\} \mid \gamma \in \Gamma\}cena(H^*)$
Minimalizáciou dostaneme

$$\gamma = \frac{3p^2}{3p^2-2p+1} = 1 + \frac{2p-1}{3p^2-2p+1} = 1 + \delta(\mathbf{p})$$

□