

Úloha:

Zistite ako môže vyzeráť jazyk L , ak $L \in \mathcal{L}(0L)$, $V = \{a\}$, $\varepsilon \in L$.

Riešenie:

Označme axiómu jazyka $x = a^p$. Keďže $\varepsilon \in L$, tak v jazyku musí existovať pravidlo $a \rightarrow \varepsilon$. Okrem tohto pravidla môžu v jazyku existovať ďalšie pravidlá tvaru $a \rightarrow a^{i_1} | a^{i_2} | \dots | a^{i_k}$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme ďalej predpokladať $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ a takto očíslovať pravidlá $1, 2, \dots, k$. Ďalej rozdelíme riešenie na dva prípady podľa toho, či platí $i_k > 1$.

Takže najskôr nech $i_k \leq 1$. Potom jazyk obsahuje buď iba pravidlo $a \rightarrow \varepsilon$ alebo obsahuje aj pravidlo $a \rightarrow a$. Z toho priamočiaro vyplýva, že buď $L = \{a^p\}$ alebo $L = \{a^m \mid \forall m \in \mathbb{N} : m \leq p\}$.

Teraz nech $i_k > 1$. Označme M túto množinu slov: $\{a^p\} \cup \{a^{i_1 \cdot m_1 + \dots + i_k \cdot m_k} \mid \forall m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}\}$. Ukážeme, že $M = L$.

Je zrejmé, že pomocou daných pravidiel nemôžeme vyrobiť žiadne iné slovo, ako je už napísané v M . Pretože v L máme buď axiómu (tá patrí do M) alebo tam máme slovo v , ktoré vzniklo z iného slova nejakým odvodením, pričom v tom odvodení sme m_0 -krát použili pravidlo $a \rightarrow \varepsilon$, m_1 -krát sme použili prvé pravidlo, m_2 -krát druhé pravidlo, \dots , m_k -krát k -te pravidlo. Takto odvodené v však zrejme z definície patrí do M . Tým sme ukázali, že $L \subseteq M$.

Ešte ukážeme, že $M \subseteq L$. To znamená, že ukážeme ako odvodiť ľubovoľné slovo z M . Označme toto slovo w . Nech $w = a^{i_1 \cdot m_1 + \dots + i_k \cdot m_k}$. Na to, aby sme ukázali, že $w \in L$, tak stačí ukázať, že existuje $u \in L$ také, že $m_1 + \dots + m_k \leq |u|$. To je zrejme lebo, ak na m_1 písmen v slove u použijeme prvé pravidlo, na m_2 písmen použijeme druhé pravidlo, \dots , na m_k písmen použijeme k -te pravidlo a na zvyšné písmená použijeme pravidlo $a \rightarrow \varepsilon$, tak týmto odvodením dostaneme práve požadované w . Avšak nejaké také dlhé slovo u určite patrí do L , lebo pomocou k -teho pravidla (pre $m_k > 1$) vieme odvodiť v jazyku L ľubovoľne dlhé slová.

A to je všetko. Tým sme jednoznačne popísali všetky možné jazyky L , ktoré vyhovujú zadaniu.

Poznámka: Množina \mathbb{N} označuje množinu všetkých prirodzených čísel aj s nulou.