

Lema 1:

Jazyky $L_1 = \{a^5\}$, $L_2 = \{a^7\}$ patria do $L(\text{DGDTOL})$.

Dôkaz:

Ku každému jednoprvkovému jazyku môžeme zostrojiť graf s jedným vrcholom a slučkou, pričom v tabuľke pre tento vrchol budú pravidlá typu $a \rightarrow a$ pre všetky písmená, ktoré dané slovo obsahuje. Zároveň toto slovo bude axiómou.

Lema 2:

Jazyky $L_3 = \{a^{2^i} \mid i \geq 0\}$, $L_4 = \{a^{3^j} \mid j \geq 0\}$ patria do $L(\text{DGDTOL})$.

Dôkaz:

Graf bude pozostávať z jedného vrcholu so slučkou. V tabuľke bude pravidlo $a \rightarrow aa$ pre L_2 , resp. $a \rightarrow aaa$ pre L_3 . Axióma bude slovo „a“ pre obidva jazyky.

Lema 3:

Jazyk $L_5 = \{a^{2^i+3^j} \mid i, j \geq 0\}$ nepatrí do $L(\text{GTOL})$.

Dôkaz:

Predpokladajme kvôli sporu, že jazyk patrí do triedy. Slovo a^2 patrí do jazyka a musí byť zároveň axiómou. Ak chceme z axiomy odvodiť ešte aj nejaké iné slovo, musíme použiť pravidlo $a \rightarrow a^k$ pre nejaké $k > 1$. Tým odvodíme slovo a^{2^k} , ktoré nepatrí do jazyka, a teda dostávame spor.

Lema 4:

Jazyk $L_6 = \{a^5, a^7\}$ nepatrí do $L(\text{GTOL})$.

Dôkaz:

Slovo a^5 musí byť axiómou, keďže je najkratšie a neexistuje pravidlo $a \rightarrow \epsilon$ (keďže ϵ nepatrí do jazyka). Z tohto slova však žiadnym pravidlom tvaru $a \rightarrow a^k$ neodvodíme slovo a^7 .

Veta:

GTOL, DGTOL, GDTOL a DGDTOL nie sú uzavreté na a) zreťazenie b) zjednotenie.

Dôkaz:

Aby sme nemuseli dokazovať 8 rôznych prípadov, ukážeme iba 2 kontrapríklady, ktoré pokryjú celé tvrdenie vety. Konkrétne nájdeme dva jazyky, ktoré patria do $L(\text{DGDTOL})$ a ich zreťazenie/zjednotenie nepatrí ani do $L(\text{GTOL})$. Keďže $L(\text{DGTOL})$ a $L(\text{GDTOL})$ sú podmnožinami $L(\text{GTOL})$ a zároveň $L(\text{DGDTOL})$ je podmnožinou všetkých troch týchto množín, platia nasledovné vzťahy: L_1, L_2, L_3 a L_4 sú jazyky, ktoré patria do všetkých štyroch uvažovaných tried, na druhej strane jazyky L_5 a L_6 nepatria ani do jednej z týchto tried. Sľúbené kontrapríklady teda vyzerajú nasledovne:

- Zjednotením L_1 a L_2 (patria do triedy) je jazyk L_6 (nepatrí do triedy)
- Zreťazením L_3 a L_4 (patria do triedy) je jazyk L_5 (nepatrí do triedy)