

Cvičenie 2: Dôkazy

→ **Úloha 1.** Dokážte, že platí

$$\sqrt{60} > \sqrt{13} + \sqrt{17}.$$

→ **Úloha 2.** Porovnajzte nasledovný pokus o dôkaz tvrdenia z predošlej úlohy s pokusom o dôkaz iného tvrdenia.

Pokus o dôkaz 1

Dokážeme, že platí

$$\sqrt{60} > \sqrt{13} + \sqrt{17}.$$

Zo školy vieme, že nerovnosti môžeme nejako upravovať, tak poďme na to:

$$\begin{aligned}\sqrt{60} &> \sqrt{13} + \sqrt{17} && |^2 \\ (\sqrt{60})^2 &> (\sqrt{13} + \sqrt{17})^2 \\ 60 &> 13 + 2\sqrt{13}\sqrt{17} + 17 \\ 60 &> 30 + 2\sqrt{221} && | -30 \\ 30 &> 2\sqrt{221} && | /2 \\ 15 &> \sqrt{221} && |^2 \\ 225 &> 221\end{aligned}$$

Takto sme sa dostali k niečomu, čo platí, takže aj pôvodná nerovnosť je pravdivá.

Pokus o dôkaz 2

Dokážeme, že platí

$$\sqrt{2} > \sqrt{3}.$$

Opäť na to pôjdeme rovnako ako v predložom príklade. Teda budeme upravovať dokazovanú nerovnosť:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &> \sqrt{3}, && | -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} - \sqrt{3} &> 0, && |^2 \\ (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 &> 0, \\ 2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 3 &> 0, && | +2 \cdot \sqrt{6} \\ 5 &> 2 \cdot \sqrt{6}, && |^2 \\ 25 &> 24,\end{aligned}$$

a to je pravda. Preto platí $\sqrt{2} > \sqrt{3}$.

Druhý pokus o dôkaz je zjavne nesprávny, nakoľko sme ním „dokázali“ nepravdivé tvrdenie $\sqrt{2} > \sqrt{3}$ (korektným dôkazom predsa nemôžeme dokázať nepravdivé tvrdenie). Avšak prvý pokus o dôkaz sa principiálne od druhého pokusu nelíši. Čiže tiež nebude úplne v poriadku. Poďme sa pozrieť bližšie na to, prečo je druhý pokus zlý.

Výhodou tejto úlohy je, že ľahko vieme vyhodnotiť pravdivosť každého výroku, ktorý sa v našom „dôkaze“ vyskytol. Problém nastáva medzi výrokmi

$$\sqrt{2} - \sqrt{3} > 0 \quad \text{a} \quad (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 > 0.$$

Prvý z nich je totiž nepravdivý a druhý je pravdivý. V akom vzťahu sú tieto dva výroky? Akú logickú operáciu či úvahu sme použili? Vzťah tam máme nasledovný:

$$\sqrt{2} - \sqrt{3} > 0 \Rightarrow (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 > 0.$$

Keď sa nad tým zamyslíme kus všeobecnejšie, túto implikáciu vieme chápať aj nasledovne: „Ak máme kladné číslo, tak jeho druhá mocnina je tiež kladná.“ Formálne zapísané tiež ako $\forall x \in \mathbb{R}: (x > 0 \Rightarrow x^2 > 0)$.

Problém je však ten, že táto implikácia kludne pripúšťa, že z nepravdy vyplýva pravda. Tento problém vieme opísať aj tak, že sme tu použili tzv. *neekvivalentnú úpravu*, teda z výroku $\sqrt{2} - \sqrt{3} > 0$ sme odvodili výrok $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 > 0$, ktorý s ním nie je ekvivalentný. Preto je nesprávny aj pokus o dôkaz 1, keďže sme v ňom použili rovnakú neekvivalentnú úpravu. Síce sme došli k správne mu záveru, ale nesprávnym logickým uvažovaním. Toto je veľmi častá chyba pri dokazovaní či vôbec riešení matematických úloh.

Ako to napraviť? Môžeme si uvedomiť, že ak pracujeme v kladných (resp. aj nezáporných) reálnych číslach, tak sa s umocňovaním na druhú už stane ekvivalentná úprava. Teda platí $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}: (a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2)$ (odvolávame sa pri tom na stredoškolské vedomosti). Ak teda skontrolujeme, že obe strany sú pred umocnením kladné, tak máme korektný dôkaz.

Úloha 3. Zhodnoťte korektnosť nasledovných dvoch pokusov o dôkaz úlohy 1:

Pokus o riešenie 3

Pomocou kalkulačky vypočítame:

$$\sqrt{60} = 7,74596669$$

$$\sqrt{13} = 3,60555128$$

$$\sqrt{17} = 4,12310563$$

$$\text{Teda } \sqrt{13} + \sqrt{17} = 3,60555128 + 4,12310563 = 7,72865691.$$

$$\text{Čiže } \sqrt{60} = 7,74596669 > 7,72865691 = \sqrt{13} + \sqrt{17}.$$

Pokus o riešenie 4

Pomocou kalkulačky vypočítame: $\sqrt{60} \doteq 7,74596669$

$$\sqrt{13} \doteq 3,60555128$$

$$\sqrt{17} \doteq 4,12310563$$

$$\text{Teda } \sqrt{13} + \sqrt{17} \doteq 3,60555128 + 4,12310563 = 7,72865691.$$

$$\text{Čiže } \sqrt{60} \doteq 7,74596669 > 7,72865691 \doteq \sqrt{13} + \sqrt{17}.$$

Úloha 4. Dokážte, že platí:

a) $\sqrt{9 - \sqrt{10}} < \sqrt{9 + \sqrt{10}} - 1$

b) $\sqrt{4} + \sqrt{7} < \sqrt{3} + \sqrt{12}$

c) $\sqrt{60} + \sqrt{\sqrt{47} - \sqrt{46}} > \sqrt{13} + \sqrt{17}$

→ **Úloha 5.** Dokážte, že pre každé nezáporné reálne číslo x platí

$$\sqrt{4x + 8} > \sqrt{x} + \sqrt{x + 4}.$$

V nasledovných úlohách a aj neskôr na predmete sa budeme často stretávať s nasledovnými pojmami:

- Pre celé čísla a, d : $d \mid a \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: a = k \cdot d$ (zápis čítame tiež „ d delí a “, „ d je deliteľom a “, „ a je deliteľné d “).
- Pre celé čísla a, d, z : $a \bmod d = z \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: a = k \cdot d + z$ (čítame: „ a dáva zvyšok z po delení d “).
- Racionálne číslo je také číslo, ktoré možno vyjadriť v tvare a/b , kde $a \in \mathbb{Z}$ a $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Množinu všetkých racionálnych čísel označujeme $\mathbb{Q}$.

O týchto pojmoch existuje veľa tvrdení (napr. súčet dvoch racionálnych čísel je racionálne číslo), ktoré zrejme aj poznáte zo strednej školy. V nasledovných úlohách si niektoré alebo podobné tvrdenia dokážeme. Preto ich v dôkazoch nevyužívajte. Snažte sa dôkazy spraviť čo najviac len z definície.

→ **Úloha 6.** Dokážte nasledovné tvrdenia:

a) $\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+ : \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

b) $\exists x \in \mathbb{R} : 3x + 2 > 2x + 5$

c) $\forall x \in \mathbb{R}^+ \exists y \in \mathbb{R}^+ : x \cdot y = 1$

d) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : xy = 0$

e) $\forall x \in \mathbb{R}^+ : (3x + 5 < 2^x \Rightarrow 4x + 8 < 2^{x+1})$

f) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : [(5 \mid a \wedge 5 \mid b) \Rightarrow 5 \mid (a + b)]$

Úloha 7. Pre každý z uvedených výrokov nájdite taký príklad množiny M a výrokových foriem $a(t)$, $b(t)$ a $c(t)$ definovaných na množine M , aby po ich dosadení do výroku sme dostali pravdivý / nepravdivý výrok

→ a) $[(\exists x \in M : a(x)) \wedge (\exists y \in M : b(y))] \Rightarrow [\forall z \in M : (a(z) \Rightarrow b(z))]$

- b) $\{\forall x \in M: [a(x) \Rightarrow (\exists y \in M: b(y))]\} \Rightarrow [\forall x \in M: (a(x) \Rightarrow b(x))]$
- c) $[(\forall x \in M: a(x)) \Rightarrow (\exists y \in M: b(y))] \Rightarrow [\forall x \in M: \exists y \in M: (a(x) \Rightarrow b(y))]$
- d) $[(\forall x \in M: \exists y \in M: (a(x) \Rightarrow b(y))) \wedge (\exists x \in M: \forall y \in M: (b(x) \Rightarrow c(y)))] \Rightarrow [\forall x \in M: (a(x) \Rightarrow c(x))]$
- e) $[\forall x \in M: (a(x) \Rightarrow \neg b(x))] \Rightarrow [(\forall x \in M: (a(x) \Rightarrow b(x))) \vee (\forall x \in M: (b(x) \Rightarrow a(x)))]$

Úloha 8. Zistite, či nasledovné výroky sú tautológie. V prípade, že nejde o tautológiu, možno dostať tautológiu nahradením $\Leftrightarrow$ za $\Leftarrow$ alebo $\Rightarrow$?

- a) $\forall x: a(x) \Rightarrow \exists x: a(x)$
- b) $\exists x: a(x) \Rightarrow \forall x: a(x)$
- c) $\forall x: (a(x) \wedge b(x)) \Leftrightarrow (\forall x: a(x) \wedge \forall x: b(x))$
- d) $\forall x: (a(x) \vee b(x)) \Leftrightarrow (\forall x: a(x) \vee \forall x: b(x))$
- e) $\exists x: (a(x) \wedge b(x)) \Leftrightarrow (\exists x: a(x) \wedge \exists x: b(x))$
- f) $\exists x: (a(x) \vee b(x)) \Leftrightarrow (\exists x: a(x) \vee \exists x: b(x))$
- g) $\forall x: (a(x) \Rightarrow b(x)) \Leftrightarrow (\forall x: a(x) \Rightarrow \forall x: b(x))$
- h) $\exists x: (a(x) \Rightarrow b(x)) \Leftrightarrow (\forall x: a(x) \Rightarrow \exists x: b(x))$

Úloha 9. Rozhodnite, či nasledovné tvrdenia sú tautológie

- a) $[(a \Rightarrow b) \wedge (c \vee d) \wedge ((\neg a \wedge c) \Rightarrow e)] \Rightarrow [\neg b \Rightarrow (e \vee d)],$
- b) $[(\neg a \Rightarrow b) \vee (c \wedge d) \vee (e \wedge \neg c \wedge \neg a)] \Rightarrow [(\neg b \wedge \neg c) \Rightarrow a],$
- c) $[(\neg a \Rightarrow b) \vee (c \wedge d) \vee (e \wedge \neg c \wedge a)] \Rightarrow [(\neg b \wedge \neg c) \Rightarrow a],$
- d) $(a \wedge b) \Rightarrow (c \vee (d \Rightarrow (e \vee (a \wedge d))))$
- e) $[(a \Rightarrow b) \wedge (\neg b \vee c)] \Rightarrow [((c \Rightarrow d) \wedge a) \Rightarrow d]$
- f) $(a \wedge \neg b) \vee [((\neg c \vee d) \wedge (a \vee \neg e) \wedge (f \vee \neg g)) \Rightarrow (d \vee \neg e)]$
- g) $(a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg b \Rightarrow (d \wedge \neg e)) \vee (\neg c \wedge d \wedge e) \vee (d \Rightarrow (\neg a \wedge c))$
- h) $(a \Rightarrow \neg c) \vee (\neg b \Rightarrow (\neg d \Rightarrow e)) \vee ((f \wedge c) \Rightarrow (a \wedge \neg d)).$

Úloha 10. Dokážte nasledovné tvrdenia:

- a) $\forall n \in \mathbb{N}: (7 \nmid 47n \Rightarrow 7 \nmid n)$
- b) $\forall x, y \in \mathbb{R}^+: \left(7x + \frac{3}{y} < 4y + \frac{2}{x} \Rightarrow x < y\right).$
- c) $\log_2 3$ je iracionálne číslo.
- d) $\forall n \in \mathbb{Z}: (3 \nmid n \Rightarrow n^2 \bmod 3 = 1)$
- e) $\forall a, b \in \mathbb{N}: [(22 \mid a \wedge 33 \mid b) \Rightarrow 11 \mid (a + b)]$
- f) $\forall n \in \mathbb{N}^+: (2^n < n! \Rightarrow 2^{n+1} < (n + 1)!)$
- g) $\forall n \in \mathbb{N}: (5 \mid n^2 + 1 \Rightarrow 10 \nmid n)$
- h) $\forall a, b \in \mathbb{N}: [(a \bmod 7 = 4 \wedge b \bmod 7 = 5) \Rightarrow ab \bmod 7 = 6]$
- i) $\forall a, b \in \mathbb{R}^+: \frac{a + b}{2} \leq \frac{2(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)}$

j) $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ : (5x^2 + 7x + 2 \leq 4y^2 + 3y \Rightarrow x \leq y)$.

Úloha 11. Dokážte, že nasledovné čísla sú iracionálne. Môžete pritom využiť, že číslo π je iracionálne.

a) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{p}$, kde p je ľubovoľné prvočíslo

c) 2π

d) $\frac{47}{\sqrt[3]{\pi} + 42}$

Úloha 12. Rozhodnite o pravdivosti nasledovných výrokov. vaše tvrdenia dokážte.

- a) Súčet ľubovoľných troch za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný tromi.
- b) Súčet ľubovoľných štyroch za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný štyrmi.
- c) Súčin ľubovoľných troch za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný tromi.
- d) Súčin ľubovoľných päť za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný piatimi.
- e) Súčin ľubovoľných päť za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný číslom 120.
- f) Súčet tretích mocnín troch za sebou idúcich čísel je deliteľný deviatimi.
- g) Súčet dvoch racionálnych čísel je racionálny.
- h) Súčet dvoch iracionálnych čísel je iracionálny.
- i) Súčin dvoch racionálnych čísel je racionálny.
- j) Súčin dvoch iracionálnych čísel je iracionálny.
- k) Súčet racionálneho a iracionálneho čísla je iracionálny.
- l) Ak súčin dvoch reálnych čísel je iracionálne číslo, tak aspoň jedno z nich musí byť iracionálne.
- m) Ak súčet piatich reálnych čísel je nula, tak aspoň jedno z nich je nezáporné.
- n) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : [(a \mid b \wedge a \mid c) \Rightarrow a \mid (b + c)]$
- o) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : [a \mid (b + c) \Rightarrow (a \mid b \wedge a \mid c)]$
- p) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : [a \mid bc \Rightarrow (a \mid b \wedge a \mid c)]$
- q) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : [\text{NSD}(a, b) = \text{NSD}(b, c) = 1 \Rightarrow \text{NSD}(a, c) = 1]$
- r) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : [\text{NSD}(a, b) = \text{NSD}(b, c) = 2 \Rightarrow \text{NSD}(a, c) = 2]$
- s) Ak $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ pre nejaké racionálne čísla a, b , tak aj $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$, aj $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.
- t) Z ľubovoľných piatich za sebou idúcich čísel možno vybrať štyri čísla, ktorých súčet bude deliteľný štyrmi.

Úloha 13. *Pytagorejská trojica* je taká trojica kladných celých čísel a, b, c , pre ktoré platí $a^2 + b^2 = c^2$. Rozhodnite, či v každej pytagorejskej trojici:

- a) sa nachádza aspoň jedno párne číslo;
- b) sa nachádza aspoň jedno číslo deliteľné tromi;
- c) sa nachádza aspoň jedno číslo deliteľné štyrmi;
- d) sa nachádza aspoň jedno číslo deliteľné šiestimi;

e) sa nachádza aspoň jedno číslo deliteľné siedmimi.

Úloha 14. Nech a, b sú kladné celé čísla opačnej parity. Dokážte, že ak nemožno krátiť zlomok $\frac{a}{b}$, tak nemožno krátiť ani zlomok $\frac{a-b}{a+b}$.

Úloha 15. Máme reálne čísla a, b, c také, že čísla

$$\frac{1}{b+c}, \quad \frac{1}{c+a}, \quad \frac{1}{a+b}$$

tvoria aritmetickú postupnosť. Dokážte, že aj čísla a^2, b^2, c^2 tvoria aritmetickú postupnosť.

Úloha 16. Dokážte, že ak x, y sú celé čísla pre ktoré platí $31 \mid 6x + 11y$, potom aj $31 \mid x + y$.

Úloha 17. Nech a, b, c sú reálne čísla, pre ktoré platí $a + b + c = 0$. Dokážte, že

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = -3.$$

Úloha 18. Dokážte, že neexistuje mnohočlen $f(x)$ s celočíselnými koeficientmi, pre ktorý by platilo $f(7) = 11$ a $f(11) = 13$.

Úloha 19. Je číslo $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ racionálne?

Úloha 20. Dokážte, že ak existuje nekonečne veľa prvočísel p , pre ktoré je aj $p + 2$ prvočíslo, tak potom existuje nekonečne veľa prvočísel p , pre ktoré je $p + 2$ prvočíslo a navyše $p + 1$ je deliteľné 6-timi.

Úloha 21. (*) Dokážte, že prvočísel je nekonečne veľa.

Úloha 22. (*) Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n je číslo 2 najväčším spoločným deliteľom čísel $2n+6, 4n+10$.

Úloha 23. (*) Dokážte, že ak existuje nekonečne veľa palindromických prvočísel (čítajú sa rovnako spredu aj odzadu), tak existuje aj nekonečne veľa palindromických prvočísel, ktoré majú nepárny počet cifier.

Riešenia úloh

7.

a) pravdivý napr. pre $a(t) \Leftrightarrow (t = 3), b(t) \Leftrightarrow (t = 2), M = \{0, 1, 2\}$, nepravdivý napr. pre $a(t) \Leftrightarrow (t = 1), b(t) \Leftrightarrow (t = 2), M = \{0, 1, 2\}$

b) pravdivý napr. pre $a(t) \Leftrightarrow (t = 3), b(t) \Leftrightarrow (t = 2), M = \{0, 1, 2\}$, nepravdivý napr. pre $a(t) \Leftrightarrow (t = 1), b(t) \Leftrightarrow (t = 2), M = \{0, 1, 2\}$

c) tautológia

d) pravdivý napr. pre

t	$a(t)$	$b(t)$	$c(t)$
0	1	1	1
1	1	1	1

nepravdivý napr. pre

t	$a(t)$	$b(t)$	$c(t)$
0	1	1	0
1	0	0	1

e) pravdivý napr. pre

t	$a(t)$	$b(t)$
0	1	1
1	1	1

nepravdivý napr. pre

t	$a(t)$	$b(t)$
0	1	0
1	0	1

8.

- a) nie, nepravdivý na prázdnej množine, ak však vylúčime prázdnu množinu ako doménu, tak výrok možno považovať za tautológiu
- b) nie
- c) áno
- d) nie, platí iba $\Leftarrow$, kontrapríklad je napr. $a(x) \Leftrightarrow x$ je párne, $b(x) \Leftrightarrow x$ je nepárne na množine $\mathbb{N}$
- e) nie, platí iba $\Rightarrow$, kontrapríklad je napr. $a(x) \Leftrightarrow x$ je párne, $b(x) \Leftrightarrow x$ je nepárne na množine $\mathbb{N}$
- f) áno
- g) nie, platí iba $\Rightarrow$, kontrapříklad je napr. $a(x) \Leftrightarrow x = 3$, $b(x) \Leftrightarrow x = 7$ je nepárne na množine $\mathbb{N}$
- h) áno

9.

- a) áno
- b) nie, neplatí napríklad pre $a \Leftrightarrow b \Leftrightarrow c \Leftrightarrow d \Leftrightarrow 0$, $e \Leftrightarrow 1$
- c) áno
- d) áno
- e) áno
- f) nie, neplatí napríklad pre $a \Leftrightarrow b \Leftrightarrow e \Leftrightarrow f \Leftrightarrow 1$, $c \Leftrightarrow d \Leftrightarrow g \Leftrightarrow 0$
- g) áno
- h) áno