

# Cvičenie 7A: Enumerácie III

## Upozornenie

Pri riešení úloh na kombinácie s opakovaním neodporúčame používať vetu z prednášky o ich počte. Pokiaľ sa predsa len rozhodnete v riešení úloh na ňu odvolávať, tak dbajte na nasledovné zásady:

- Musí byť jasné, ako túto vetu používate, teda že čo je množina, z ktorej vyberáte prvky a koľko prvkov z nej vyberáte.
- Musíte použiť naozaj definíciu kombinácií s opakovaním a vetu z prednášky. Je možné, že ste sa stretli (napr. na strednej škole) s inou definíciou kombinácií s opakovaním alebo aj iným vzorcom, napr.  $\binom{n+k}{k}$  alebo  $\binom{n+k-1}{n}$ .

Nestačí len napísať vzorec alebo poznámku „kombinácie s opakovaním“. Riešenia cez vzorec, ktoré nerešpektujú tieto zásady, môžu byť pokladané za neúplné, nakoľko pôsobia, že látku nerozumiete.

→ **Úloha 1.** Na salaši chovajú ovce z deviatich plemien (nekonečne veľa oviec z každého plemena). Ovce rovnakého plemena sú navzájom neodlíšiteľné. Koľko rôznych jedálničkov má k dispozícii medveď, ktorý chce zjesť presne päť oviec?

Uvedieme príklad neúplných riešení tejto úlohy, hoci so správnym výsledkom.

### Neúplné riešenie 1

Kombinácie s opakovaním  $n = 9$ ,  $k = 5 \rightarrow \binom{9+5-1}{5} = \binom{13}{5}$  možností.

V tomto riešení nie je jasné, ako bola použitá veta o kombináciách s opakovaním. Môže ísť o riešenie študenta, ktorý len náhodou správne tipol, že  $n$  má byť 9 a  $k$  má byť 5. Od úplného riešenia ho nedelí veľa – stačí len podrobnejšie napísať, prečo sme zvolili  $n = 9$  a  $k = 5$ .

### Neúplné riešenie 2

Kombinácie s opakovaním  $n = 5$ ,  $k = 9 \rightarrow \binom{9+5-1}{5} = \binom{13}{5}$  možností.

Toto riešenie má správny výsledok, ale obsahuje dve chyby:

1. Nejde o kombinácie s opakovaním 9-tej triedy z 5 prvkov, ako naznačuje voľba  $n = 5$ ,  $k = 9$ .
2. Používa nesprávny vzorec pre výpočet počtu kombinácií s opakovaním (v zmysle našej definície)

Síce sa tieto dve chyby navzájom vyrušili.

### Správne riešenie

Z (množiny)  $n = 9$  plemien vyberáme neusporiadaný súbor (multimnožinu)  $k = 5$  plemien, ktorú medveď zje. Kombinácie s opakovaním  $\rightarrow \binom{9+5-1}{5} = \binom{13}{5}$  možností.

Avšak odporúčame úlohu riešiť nasledovne.

### Odporúčané správne riešenie (stručné)

5 oviec, kt. medveď zje  $\rightarrow$  5 guľôčok

8 paličiek  $\rightarrow$  rozdelí guľôčky na 9 úsekov  $\rightarrow$  z  $i$ -teho plemena zje medveď toľko oviec, koľko guľôčok je v  $i$ -tom úseku.

Počet usporiadaní 5 guľôčok a 8 paličiek  $= \binom{5+8}{8} = \binom{13}{5}$  – vyberieme z 13 miest 8 miest pre paličky (kombinácie bez opakovania)

Všimnite si, že v tomto riešení používame kombinácie **bez opakovania**. Niektorí študenti sa odvolávajú na kombinácie s opakovaním, čo nie je úplne správne. Pôvodná úloha síce o nich je, no toto riešenie je o tom, ako ich zredukujeme na kombinácie bez opakovania.

→ **Úloha 2.** Koľko rôznych jedálničkov má k dispozícii medveď z predchádzajúcej úlohy v prípade, že sa rozhodol držať diétu a zjesť *najviac* štyri ovce?

→ **Úloha 3.** Uvažujme rovnicu

$$x_1 + x_2 + \dots + x_p = s,$$

kde  $p, s \in \mathbb{N}$  sú parametre. Nájdite počet riešení tejto rovnice v prirodzených číslach a v nenulových prirodzených číslach.

→ **Úloha 4.** Uvažujme nerovnicu

$$x_1 + x_2 + \dots + x_p \leq s,$$

kde  $p, s \in \mathbb{N}$  sú parametre. Nájdite počet riešení tejto nerovnosti v prirodzených číslach a v nenulových prirodzených číslach.

→ **Úloha 5.** Koľko prešmyčiek je možné vytvoriť zo slova ANTANANARIVO?

→ **Úloha 6.** Určte počet 7-ciferných čísel, ktoré majú cifry

- a) v klesajúcom poradí,
- b) v rastúcom poradí,
- c) v nerastúcom poradí,
- d) v neklesajúcom poradí.

**Úloha 7.** Koľkými rôznymi spôsobmi môžeme rozdeliť 10 cukríkov medzi 5 detí?

**Úloha 8.** V obchode majú 13 druhov keksíkov. Chceme si kúpiť 24 keksíkov tak, aby sme z každého druhu kúpili aspoň jeden. Koľkými spôsobmi to vieme spraviť?

→ **Úloha 9.** Katka, Lenka, Norbert, Marek a Oľga nazbierali 47 nerozlíšiteľných jabĺk. Chcú si ich rozdeliť tak, že Katka a Lenka dostanú párny počet jabĺk a Norbert, Marek a Oľga dostanú nepárny počet jabĺk. Koľkými spôsobmi to môžu spraviť?

**Úloha 10.** Na policike je za sebou uložených 12 kníh. Koľkými spôsobmi možno vybrať spomedzi nich 5 tak, aby sme nevybrali žiadne dve vedľa seba?

**Úloha 11.** Máme 52 kariet: 26 červených a 26 modrých. Koľkými spôsobmi možno z nich vybrať podmnožinu tak, aby v nej bol rovnaký počet červených a modrých kariet?

**Úloha 12.** Koľkými riešení v obore celých čísel má rovnica  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32$

- a) ak  $x_1 \geq -2, x_i \geq 0, 2 \leq i \leq 4$  ?
- b) ak  $x_1 \geq -2, x_2 \geq 2, x_3 > 0, x_4 \geq -1$  ?

## Výsledky

1.  $\binom{13}{5}$
2.  $\binom{13}{4}$
3. v  $\mathbb{N}$ :  $\binom{p+s-1}{s}$ , v  $\mathbb{N}^+$ :  $\binom{s-1}{s-p}$
4. v  $\mathbb{N}$ :  $\binom{p+s}{s}$ , v  $\mathbb{N}^+$ :  $\binom{s}{s-p}$
5.  $\frac{12!}{4! \cdot 3!}$
6. a)  $\binom{10}{7}$ , b)  $\binom{9}{7}$ , c)  $\binom{9+7}{7} - 1$ , d)  $\binom{8+7}{7}$
9.  $\binom{5+22-1}{22} = \binom{26}{22} = 14\,950$ , 2. sada D. Ú. 2019/20
10.  $\binom{8}{5} = 56$
11.  $\sum_{k=0}^{26} \binom{26}{k} \binom{26}{k} = \binom{52}{26}$