

Cvičenie 10A: Rozklady určené reláciou ekvivalencie, usporiadania

→ **Úloha 1.** Dokážte, že relácia

$$R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; 5 \mid (a - b)\}$$

je reláciou ekvivalencie na množine $\mathbb{Z}$. Opíšte, aký rozklad indukuje

a) ak ju zúžime na množinu $\{-10, -8, 1, 5, 16, 17, 20, 47, 49\}$,

b) na množine $\mathbb{Z}$.

→ **Úloha 2.** Na množine študentov gymnázia definujeme reláciu „byť spolužiakom“. Dokážte, že ide o reláciu ekvivalencie. Čo je rozklad, ktorý určuje?

→ **Úloha 3.** Dokážte, že relácia

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x - y \in \mathbb{Z}\}$$

je reláciou ekvivalencie a popíšte rozklad, ktorý indukuje.

→ **Úloha 4.** Nech R a S sú relácie ekvivalencie na množine M . Uvažujme nasledovné relácie

a) $R \cup S$, b) $R \cap S$, c) $R - S$, d) RS , e) R^{-1} .

Pre každú z podúloh nájdite príklad relácií R, S kedy výsledná relácia je opäť reláciou ekvivalencie; a taktiež príklad relácií R, S , kedy výsledná relácia nie je reláciou ekvivalencie. V prípade, že také relácie R, S nemožno nájsť, dokážte prečo.

→ **Úloha 5.** Uvažujme reláciu

$$R = \{(2, 1), (3, 1), (5, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 5)\}$$

na množine $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ide o reláciu usporiadania? Ak nie, ako ju treba upraviť, aby sme dostali usporiadanie?

Úloha 6. Pre zadané nezáporné celé čísla m, n nájdite usporiadanú množinu, ktorá bude mať n maximálnych a m minimálnych prvkov.

Úloha 7. Pri každej z nasledovných relácií určte, či je reflexívna, antisymetrická, tranzitívna, dichotomická. Určite, či sú usporiadaním, resp. úplným usporiadaním.

→ a) Relácia $|$ na $\mathbb{Z}$, kde $a \mid b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: ka = b$ pre všetky $a, b \in \mathbb{Z}$

→ b) Relácia $|$ na $\mathbb{N} - \{1\}$, kde $a \mid b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: ka = b$ pre všetky $a, b \in \mathbb{N}$

c) $R = \{(a, a); a \in \mathbb{N}\} \cup \{(2a + 1, 2a); a \in \mathbb{N}\}$ (na $\mathbb{N}$),

→ d) $R = \{((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2; a \leq c \wedge b \leq d\}$,

e) $R = \{((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2; a + b \leq c + d\}$,

f) $R = \{((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2; a + b < c + d\}$,

g) $R = \{((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2; a + b < c + d \vee (a, b) = (c, d)\}$,

h) Relácia z predošlej podúlohy zúžená na množinu $M = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2; a \geq 5 \wedge b \geq 7 \wedge a + b \leq 47\}$

i) (*) $R = \{(A, B) \in \mathcal{P}_{\text{kon}}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}_{\text{kon}}(\mathbb{N}); \sum_{a \in A} 2^a \leq \sum_{b \in B} 2^b\}$, kde $\mathcal{P}_{\text{kon}}(\mathbb{N})$ označuje množinu konečných podmnožín nezáporných celých čísel.

j) $R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; 7a \mid b \vee a = b\}$

k) $\preceq = \{((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2; (\exists k \in \mathbb{N})(c = ka \wedge d = kb)\}$ [Riešenie]

→ **Úloha 8.** Určte minimálne, maximálne, najmenšie a najväčšie prvky usporiadaní z predošlej úlohy.

→ **Úloha 9.** Uveďte príklad relácie usporiadania, ktoré má 2 minimálne a 5 maximálnych prvkov.

→ **Úloha 10.** Uveďte príklad relácie usporiadania, ktoré 3 minimálne a žiadne maximálne prvky.

Úloha 11. Možno na množine $\mathbb{N}^2$ definovať úplné usporiadanie?

Úloha 12. Z množiny čísel $M = \{1, 2, \dots, 30\}$ si vyberáme nejaké podmnožiny tak, aby každé dve vybrané čísla boli nesúdeliteľné. Všetky takéto podmnožiny dáme do množiny $\mathcal{N}$. Teda

$$\mathcal{N} = \{X \subseteq M; \forall a, b \in X: \text{NSD}(a, b) = 1\}.$$

a) Určte maximálne prvky množiny $\mathcal{N}$ vzhľadom na usporiadanie $\subseteq$. Existuje najväčší prvok?

b) Je pravda, že všetky tieto maximálne prvky majú rovnaký počet prvkov?

c) Určte maximálne prvky vzhľadom na ostré usporiadanie $\prec$ „mať viac prvkov ako“. Teda $A \preceq B \Leftrightarrow A = B \vee |A| < |B|$. Existuje najväčší prvok?

d) Koľko najviac čísel možno vybrať z množiny M tak, aby každé dve z vybraných čísel boli nesúdeliteľné?

→ **Úloha 13.** Pre neprázdnu množinu $A \subseteq \mathbb{N}$ označuje $\max A$ najväčší prvok množiny A (vzhľadom na klasické usporiadanie $\leq$). Nech $M = \{n \in \mathbb{N}; 0 \leq n \leq 47\}$ a nech

$$R = \{(A, B) \in (\mathcal{P}(M) - \{\emptyset\}) \times (\mathcal{P}(M) - \{\emptyset\}); \max A < \max B \vee A = B\}.$$

Dokážte, že R je usporiadaním na množine $\mathcal{P}(M) - \{\emptyset\}$ a nájdite všetky jej minimálne, najmenšie, maximálne a najväčšie prvky. Správnosť vašich nájdenných prvkov dokážte.

Úloha 14. Nájdite príklad usporiadaní R a S na rovnakej neprázdnej množine M , aby relácie

a) $R \cap S$, b) $R \cup S$, c) $R - S$, d) RS , e) R^{-1} ?

boli / neboli usporiadaniami. V prípade, že taká voľba R, S neexistuje, dokážte to.

Úloha 15. Nech R je usporiadanie na množine A a S je usporiadanie na množine B . Rozhodnite, či sú naslednové relácie usporiadaním:

a) relácia T na množine $A \times B$, kde $(a, b)T(c, d) \Leftrightarrow aRc \wedge bSd$,

b) relácia U na množine $A \times B$, kde $(a, b)U(c, d) \Leftrightarrow aRc \vee bSd$,

Úloha 16. Nech $A, I \neq \emptyset$ sú množiny a nech pre každé $i \in I$ je φ_i usporiadanie množiny A . Dokážte, že potom aj $\bigcap_{i \in I} \varphi_i$ je usporiadanie množiny A . Čo ak sú φ_i úplné usporiadaniami?

Poznámka. $\bigcap_{i \in I} \varphi_i = \{x; (\forall i \in I)(x \in \varphi_i)\}$