

Cvičenie 11A: Zobrazenia

Úloha 1. O nasledovných reláciách rozhodnite, či sú zobrazením:

→ a) relácia S na $\mathbb{R}$, kde $xSy \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

→ b) relácia T na $\mathbb{N}$, kde $aTb \Leftrightarrow a = 3b$

→ c) relácia U na $\mathbb{N}$, kde $aTb \Leftrightarrow 3a = b$

→ **Úloha 2.** Uvažujme zobrazenie $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ dané predpisom

$$f(x) = 3 + \frac{8}{2x + 4}.$$

Je zobrazenie injektívne? Je surjektívne? Nájdite množinu B tak, aby zobrazenie $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow B$ s rovnakým predpisom bolo bijekciou.

Úloha 3. Zistite, či nasledovné zobrazenia sú injekcie, surjekcie a bijekcie:

→ a) $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f((a, b)) = a^2 + b$

→ b) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $f(n) = (2n + 3, n^2 + 7)$

→ c) $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f((a, b)) = 2^a 3^b$

→ d) $f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $f(A) = A \cup \{47\}$

e) $f: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $f((a, b)) = (3b + 5, 2a - 3)$

f) $f: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $f((a, b)) = (a + b, a - b)$

g) $f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $f(A) = \mathbb{N} - A$

h) $f: \mathcal{P}(\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}) \rightarrow \mathbb{N}$, $f(A) = \sum_{x \in A} x$

i) $f: \mathcal{P}(\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}) \rightarrow \mathbb{N}$, $f(A) = \sum_{x \in A} x$

j) $f: \mathcal{P}(\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}) \rightarrow \{0, 1, \dots, 15\}$, $f(A) = \sum_{x \in A} x$

→ **Úloha 4.** Nech A, B sú konečné množiny, pričom $|A| = a$, $|B| = b$. V závislosti od čísel a, b určte, koľko je

a) zobrazení z množiny A do množiny B

b) injektívnych zobrazení z množiny A do množiny B

c) surjektívnych zobrazení z množiny A do množiny B

d) bijektívnych zobrazení z množiny A do množiny B

→ **Úloha 5.** Dokážte, že

a) Zloženie dvoch injekcií je injekcia.

b) Zloženie dvoch surjekcií je surjekcia.

c) Zloženie dvoch bijekcií je bijekcia.

Úloha 6. Nájdite bijekciu medzi množinami.

→ a) $\langle 17, 42 \rangle$ a $\langle -47, 15 \rangle$

→ b) $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}^+$

c) $\mathbb{N}$ a $\{n \in \mathbb{N}; n \geq 47\}$

→ d) $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$

e) $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N} \times \{0, 1, 2\}$

→ f) $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

→ g) $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$

h) $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

i) $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}^n$

Úloha 7. Nech f je injektívne zobrazenie z množiny A do množiny B . Nájdite injektívne zobrazenie z $\mathcal{P}(A)$ do $\mathcal{P}(B)$.

Úloha 8. Nech f je symetrická relácia na množine A , ktorá je zároveň zobrazením. Dokážte, že f je bijekcia.