

Cvičenie 11B: Spočítateľné množiny

Úloha 1. Rozhodnite, či nasledovné množiny sú spočítateľné. Ak áno, nájdite bijekciu do $\mathbb{N}$.

- a) $\mathbb{N}^+$
- b) $\{n \in \mathbb{N}; n \geq 47\}$
- c) $\mathbb{Z}$
- d) $\mathbb{N} \times \{0, 1, 2\}$
- e) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- f) $\mathbb{Q}$
- g) $\mathbb{R}$
- h) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- i) $\mathbb{N}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$
- j) množina všetkých konečných postupností núl a jednotiek, ktoré sa začínajú jednotkou.
- k) množina všetkých konečných postupností núl a jednotiek.
- l) množina slov z písmen anglickej abecedy

Úloha 2. Rozhodnite, či nasledovné množiny sú spočítateľné. Je ich mohutnosť rovná $|\mathbb{N}|$ alebo $|\mathbb{R}|$?

- a) množina konečných podmnožín prirodzených čísel
- b) množina všetkých podmnožín prirodzených čísel, teda $\mathcal{P}(\mathbb{N})$
- c) množina konečných postupností prirodzených čísel ($\mathbb{N}^*$)
- d) množina nekonečných postupností prirodzených čísel ($\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$)
- e) množina všetkých nekonečných nerastúcich postupností prirodzených čísel [Riešenie]
- f) množina všetkých nekonečných neklesajúcich postupností prirodzených čísel [Riešenie]
- g) $\mathbb{R}^+$
- h) $(3, 5)$
- i) $(3, 5]$
- j) množina všetkých injekcií $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- k) množina všetkých surjekcií $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- l) množina všetkých bijekcií $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- m) množina všetkých slov (teda konečných postupností) pozostávajúcich z malých písmen anglickej abecedy a $\mathbb{N}$
- n) množina všetkých programov napísaných v Pythone
- o) množina všetkých problémov v informatike (v tejto úlohe si treba nejako rozumne definovať, čo je to problém)
- p) (*) ľubovoľná množina disjunktných otvorených intervalov

Úloha 3. Rozhodnite, či existuje bijekcia medzi množinami:

- a) $(0, 1)$ a $(0, \infty)$
 b) (*) $(0, 1)$ a $\langle 0, 1 \rangle$

Úloha 4. Dokážte, že všetky intervaly (a, ∞) , kde a je reálne číslo, majú rovnakú mohutnosť.

Úloha 5. Nech M je množina všetkých matíc stupňa 2, tvaru $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, kde $a, b \in \mathbb{N}$. Dokážte, že M je spočítateľná.

Úloha 6. Porovnajte mohutnosti množín

- a) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$,
 b) (*) $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}$
 c) (*) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (množina všetkých zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$) a $\mathbb{R}$
 d) (*) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ a $\mathcal{P}(\mathbb{R})$
 → e) množina všetkých rastúcich funkcií $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a množina všetkých klesajúcich funkcií $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 f) (*) množina všetkých rastúcich funkcií $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

Úloha 7. Nech A a B sú množiny. Platí nasledovné tvrdenie? Injekcia z A do B existuje práve vtedy, keď existuje surjekcia z B do A .