

# Cvičenie 13A: Súvislosť a stromy

→ **Úloha 1.** Nech  $G = (V, E)$  je jednoduchý graf rádu  $n$  taký, že pre všetky  $v \in V$  platí  $\deg_G(v) \geq (n-1)/2$ . Dokážte, že graf  $G$  musí byť nutne súvislý.

**Úloha 2.** Nech  $G = (V, E)$  je jednoduchý graf rádu  $n$  taký, že pre každú dvojicu nesusedných vrcholov  $u, v$  platí  $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n-1$ . Dokážte, že  $G$  musí byť nutne súvislý.

**Úloha 3.** Nech  $G = (V, E)$  je ľubovoľný graf. Dokážte alebo vyvráťte:

- 
- a) Ak pre dvojicu vrcholov  $u, v \in V$  existuje  $u$ - $v$ -sled, tak existuje aj cesta začínajúca v  $u$  a končiaci v  $v$ .
  - b) Ak pre dvojicu vrcholov  $u, v \in V$  existuje  $u$ - $v$ -ťah, tak existuje aj cesta začínajúca v  $u$  a končiaci v  $v$ .
  - c) Ak pre dvojicu vrcholov  $u, v \in V$  existuje  $u$ - $v$ -sled, tak existuje aj ťah začínajúci v  $u$  a končiaci v  $v$ .
  - d) Ak pre vrchol  $u \in V$  existuje uzavretý sled nenulovej dĺžky prechádzajúci cez  $u$ , tak existuje aj kružnica prechádzajúca cez  $u$ .
  - e) Ak pre vrchol  $u \in V$  existuje uzavretý ťah nenulovej dĺžky prechádzajúci cez  $u$ , tak existuje aj kružnica prechádzajúca cez  $u$ .

**Úloha 4.** Podľa riešenia predošlej úlohy navrhnete funkciu v Pythone, ktorá dostane ako parameter  $u$ - $v$ -sled a vypíše na výstup  $u$ - $v$ -cestu.

→ **Úloha 5.** Dokážte, že graf s minimálnym stupňom  $\delta$  obsahuje

- a) cestu dĺžky  $\delta + 1$ ;
- b) kružnicu dĺžky aspoň  $\delta + 1$ .

**Úloha 6.** Dokážte, že komplementárny graf k nesúvislému grafu je súvislý. (Komplementárny graf grafu  $G$  je taký graf  $G'$ , pre ktorý platí  $V(G') = V(G)$  a  $E(G') = \binom{V}{2} - E(G)$ .)

**Úloha 7.** Dokážte, že ľubovoľné dve najdlhšie cesty v súvislom grafe majú spoločný vrchol. Majú aj spoločnú hranu?

**Úloha 8.** Dokážte, že ak graf  $G = (V, E)$  obsahuje aspoň jeden uzavretý sled nepárnej dĺžky, tak obsahuje aj kružnicu nepárnej dĺžky.

**Úloha 9.** Dokážte, že v ľubovoľnom 2-regulárnom grafe leží každý vrchol na práve jednej kružnici.

**Úloha 10.** Popíšte všetky grafy, ktoré neobsahujú žiadnu cestu dĺžky 3.

**Úloha 11.** Nech  $n \geq 1$ . Nájdite najmenšie  $k(n) \in \mathbb{N}$  také, že všetky jednoduché grafy rádu  $n$  s  $k(n)$  hranami sú súvislé.

→ **Úloha 12.** Koľko najmenej hrán môže obsahovať súvislý  $n$ -vrcholový graf?

## Stromy

**Definícia 1.** *Strom* je súvislý acyklický graf (teda neobsahuje kružnicu).

**Definícia 2.** *List* stromu je vrchol stupňa 1.

**Definícia 3.** *Kostra* grafu  $G$  je podgraf grafu  $G$ , ktorý je strom a ktorý obsahuje všetky vrcholy grafu  $G$ .

→ **Úloha 13.** Dokážte, že každý netriviálny strom má aspoň dva listy.

**Úloha 14.** Koľko najmenej a koľko najviac listov môže mať strom na  $n$  vrchoch?

→ **Úloha 15.** Dokážte, že strom na  $n$  vrchoch má práve  $n - 1$  hrán.

→ **Úloha 16.** Dokážte, že každý strom  $T$  má aspoň  $\Delta(T)$  listov.

→ **Úloha 17.** Dokážte, že každý súvislý graf má kosť.

**Úloha 18.** O strome  $T$  vieme, že má

- 4 vrcholy stupňa 2,
- 2 vrcholy stupňa 3,
- 7 vrcholov stupňa 4,
- maximálny stupeň 4.

Koľko môže mať strom  $T$  listov?

**Úloha 19.** Dokážte, že vrcholy stromu možno očíslovať  $v_1, v_2, \dots, v_n$  tak, že pre každé  $i \geq 2$  má vrchol  $v_i$  práve jedného suseda v množine  $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$ .