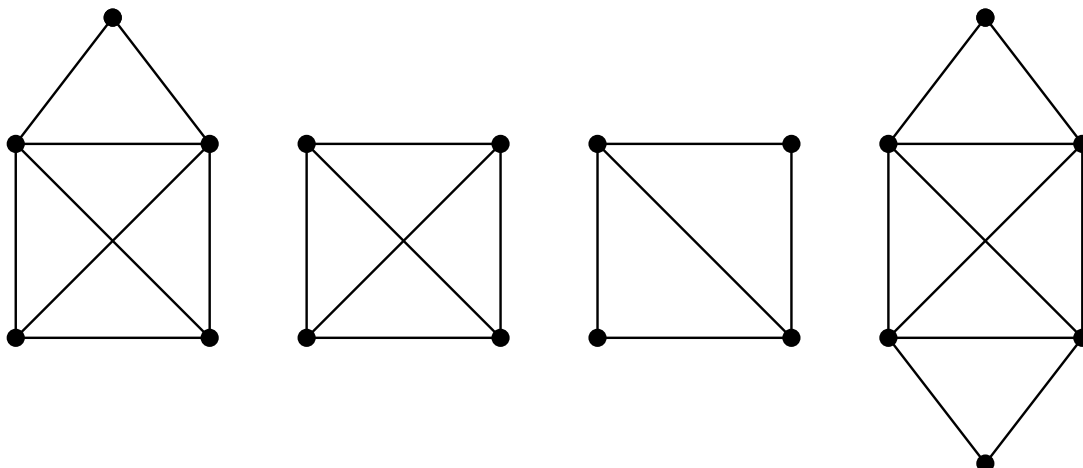


Cvičenie 13B: Eulerovské a bipartitné grafy

→ **Úloha 1.** Zistite, či sú nasledujúce grafy eulerovské:



→ **Úloha 2.** Zistite, či v grafoch z predchádzajúcej úlohy existuje otvorený ťah obsahujúci všetky hrany.

→ **Úloha 3.** Nájdite všetky $n \geq 1$ také, že kompletý graf K_n je eulerovský.

Úloha 4. Basketbalového tréningu sa zúčastňuje 17 hráčov. Tréning pozostáva z viacerých kôl. V prvom kole hrajú proti sebe dva 5-členné tímy. Po každom kole je jedna z päťíc vymenená piatimi hráčmi, ktorí toto kolo nehrali. Tí budú v ďalšom kole hrať proti päťici čo ostala. Žiaden hráč nehrať tri kolá po sebe. Je možné zostaviť rozpis turnaja tak, aby ľubovoľná kombinácia dvoch 5-členných tímov hrala práve raz proti sebe?

Začiatok takého rozpisu môže vyzeráť nasledovne:

1. kolo: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ vs. $\{6, 7, 8, 9, 10\}$
2. kolo: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ vs. $\{11, 12, 13, 14, 15\}$
3. kolo: $\{6, 8, 9, 16, 17\}$ vs. $\{11, 12, 13, 14, 15\}$ (teraz sme museli stiahnuť tím $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, lebo nemôže hrať tri zápasy po sebe, tímy nie sú fixné, takže hráč 6 kludne môže hrať s inými hráčmi ako v 1. kole)
4. kolo: $\{6, 8, 9, 16, 17\}$ vs. $\{1, 2, 3, 4, 7\}$ (teraz sme museli stiahnuť tím $\{11, 12, 13, 14, 15\}$)

Bipartitné grafy

→ **Úloha 5.** Dokážte, že pre každý bipartitný 3-regulárny graf s partíciami A, B platí $|A| = |B|$.

→ **Úloha 6.** Nech G je súvislý bipartitný 3-regulárny graf. Dokážte, že ak z grafu G odstránime ľubovoľný vrchol, tak ostane súvislý.

Úloha 7. Nech G je súvislý bipartitný 3-regulárny graf. Dokážte, že ak z grafu G odstránime ľubovoľnú hranu, tak ostane súvislý.

Úloha 8. Dokážte, že každý strom je bipartitný.

→ **Úloha 9.** Posúďte správnosť nasledovného dôkazu.

Pokus o riešenie

Tvrdenie. Každý n -vrcholový graf G s $\delta(G) \geq 3$ obsahuje kružnicu dĺžky 4.

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa n . Graf s minimálnym stupňom vrchola 3 musí mať aspoň 4 vrcholy. Ak $n = 4$, tak $G = K_4$ (úplný graf na 4 vrcholov), ktorý obsahuje kružnicu dĺžky 4.

Predpokladajme teraz, že tvrdenie platí pre nejaké n a dokážeme, že platí aj pre $n + 1$. Podľa indukčného predpokladu, n -vrcholový graf G obsahuje kružnicu dĺžky 4. Ak do grafu G pridáme nový vrchol stupňa aspoň 3, tak dostaneme $(n + 1)$ -vrcholový graf G' . Nový graf G' má tiež minimálny stupeň aspoň 3 (lebo sme len pridali hrany) a stále obsahuje kružnicu dĺžky 4. Tvrdenie teda platí aj pre $n + 1$, čím je dôkaz indukciou hotový. $\square$

→ **Úloha 10.** Na večierku sa stretlo $3n - 1$ ľudí, $n \in \mathbb{N}^+$. Niektoré dvojice ľudí sa medzi sebou poznajú (vzťah poznať sa je symetrický). Dokážte, že v každej takejto situácii existuje n navzájom disjunktných párov s vlastnosťou, že buď sa všetky páry medzi sebou poznajú, alebo sa žiaden z párov medzi sebou nepozná.