

Riešenie 1. sady domácich úloh

Úloha 1

Nech $p(x)$ označuje výrokovú formu hovoriacu: „Celé číslo x je prvočíslo“. Uvažujme výrok: „Každé celé číslo väčšie ako 3 možno vyjadriť ako súčet dvoch prvočísel.“

- a) Zapište tento výrok syntaxou výrokovej logiky (dovolené symboly sú $\forall, \exists, \in, \mathbb{Z}, :, \geq, >, \leq, <, =, +, -, \cdot, /, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, výroková forma p , zátvorky, premenné, kvantifikovať možno len cez množinu $\mathbb{Z}$).
- b) Určte pravdivostnú hodnotu tohto výroku. Vaše tvrdenie dokážte.

Riešenie a)

$$\forall n \in \mathbb{Z}: (n > 3 \Rightarrow (\exists a \in \mathbb{Z}: \exists b \in \mathbb{Z}: (p(a) \wedge p(b) \wedge n = a + b)))$$

Riešenie b) Ukážeme, že výrok je nepravdivý. Číslo $n = 11$ sa nedá vyjadriť ako súčet dvoch prvočísel. Všetky prvočísla menšie ako 11 sú 2, 3, 5 a 7 a žiadne dvojica nedáva súčet 11: $2 + 2 = 4$, $2 + 3 = 5$, $2 + 7 = 9$, $3 + 3 = 6$, $3 + 7 = 10$, $5 + 5 = 10$, $5 + 7 = 12$, $7 + 7 = 14$.

Komentár. To, čo sme napísali vyššie, úplne stačilo napísať do riešenia. Nepravdivosť všeobecného tvrdenia sa najjednoduchšie dokáže príkladom. Preto, ak vieme taký príklad poskytnúť, tak je najistejšie aj tak spísať riešenie.

Stručne ešte napíšeme, ako sa dal skúmaný výrok formálne zapísať. Výrok hovorí niečo o ľubovoľnom celom čísle väčšom ako 3. To vieme zapísať ako

$$\forall n \in \mathbb{Z}: (n > 3 \Rightarrow \dots).$$

Miesto bodiek chceme napísať, že číslo n možno vyjadriť ako súčet dvoch prvočísel. Potrebujeme dve prvočísla – na to využijeme premenné, napríklad a , b . Tie budú kvantifikované existenčným kvantifikátorom, lebo tvrdíme, že sa n dá tak zapísať. Kvantifikovať chceme výrokovú formu $n = a + b$. Ešte potrebujeme určiť, že a , b majú byť prvočísla. Túto podmienku vieme pridať cez konjunkciu. Takto nám vznikne výrok, ktorý sme uviedli.

Úloha 2

Nájdite taký príklad množiny M a výrokových foriem $a(x)$ a $b(x)$, aby po ich dosadení do výroku

$$(\forall x \in M: (a(x) \Rightarrow b(x))) \vee (\exists x \in M: a(x) \wedge \forall x \in M: \neg b(x)).$$

sme dostali a) pravdivý, b) nepravdivý výrok. Správnosť vašich volieb dokážte.

Riešenie a) 1. Nech $M = \{42\}$, $a(x) \Leftrightarrow 1 \mid x$ a $b(x) \Leftrightarrow x = 42$. To zodpovedá pravdivostnej tabuľke:

x	$a(x)$	$b(x)$
42	1	1

Potom je výrok $\forall x \in M: (1 \mid x \Rightarrow x = 42)$ pravdivý, lebo platí pre všetky prvky z M (teda jediný prvok $x = 42$). Potom aj celá disjunkcia je pravdivá.

Riešenie a) 2. Nech $M = \emptyset$. Potom je výrok na ľavej strane disjunkcie pravdivý (všeobecný kvantifikátor cez prázdnu množinu), a teda celá disjunkcia je pravdivá.

Riešenie b) 1 Nech $M = \{2, 3\}$, $a(x) \Leftrightarrow 2 \mid x$ a $b(x) = 2 \nmid x$. To zodpovedá pravdivostnej tabuľke:

x	$a(x)$	$b(x)$
2	1	0
3	0	1

Výrok $\forall x \in M: (a(x) \Rightarrow b(x))$ je nepravdivý, lebo neplatí pre $x = 2$. Výrok $\forall x \in M: \neg b(x)$ je tiež nepravdivý, lebo neplatí pre $x = 3$. Preto je aj celá konjunkcia nepravdivá. A keďže oba členy disjunkcie sú nepravdivé, tak aj celý výrok je nepravdivý.

Poznámka. Po dosadení výrokových foriem z tohto príkladu sme dostali výrok

$$(\forall x \in M: (2 \mid x \Rightarrow 2 \nmid x)) \vee (\exists x \in M: 2 \mid x \wedge \forall x \in M: 2 \mid x).$$

Ide o disjunkciu dvoch výrokov, ktoré možno slovne prečítať ako:

- Ak je číslo párne, tak je nepárne.
- Existuje párne číslo a všetky čísla sú párne.

Aj z prečítania vidíme, že oba výroky sú nepravdivé.

Ako prísť na príklad v b) Chceme, aby disjunkcia dvoch výrokov bola nepravdivá, preto oba musia byť nepravdivé. Aby neplatil výrok $\forall x \in M: (a(x) \Rightarrow b(x))$, tak pre *nejaké* x_1 musí neplatiť $a(x_1) \Rightarrow b(x_1)$, teda $a(x_1) \Leftrightarrow 1$, $b(x_1) \Leftrightarrow 0$. Rečou tabuľky, v niektorom jej riadku musíme mať 1, 0. Na pravej strane máme konjunkciu. Aby bola nepravdivá, tak aspoň jeden z výrokov musí byť nepravdivý. Výrok $\exists x \in M: a(x)$ je pravdivý, lebo platí pre $x = x_1$. Preto musí byť nepravdivý výrok $\forall x \in M: \neg b(x)$. Ten neplatí ak pre *nejaké* x_2 máme $\neg b(x_2) \Leftrightarrow 0$, teda $b(x_2) \Leftrightarrow 1$. Tabuľka výrokových foriem $a(x)$, $b(x)$, tak musí obsahovať dva takéto riadky:

x	$a(x)$	$b(x)$
	1	0
		1

A to sme už v riešení overili, že nám to pre jednu takúto tabuľku stačí. Dokonca nám nevadí, keď tabuľka obsahuje aj ľubovoľne veľa iných riadkov.

Všetky riešenia sme zapísali tak, ako by mali byť podľa pravidiel dokazovania. Úlohou malo byť uviesť príklad, tak sme ho uviedli a následne sme dokázali, aká pravdivostná hodnota. Spôsob, akým sme ho dostali nie je pre účely dokázania správnosti relevantný. V ňom totiž robíme úvahy opačným smerom, ako potrebujeme. Vychádzame z toho, že výrok je nepravdivý, teda z toho, čo máme podľa zadania dokázať. A to v dôkaze nemá čo robiť.

Úloha 3

Dokážte, že pre každé kladné celé číslo n platí rovnosť

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Rovnosť dokážeme matematickou indukciou.

Báza. Pre $n = 1$ dostávame rovnosť $\frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2}$, čo platí, keďže $2 - \frac{3}{2} = \frac{4}{2} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$.

Indukčný krok. Teraz uvažujme ľubovoľné celé $n \geq 1$. Predpokladajme, že platí

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}. \quad (\text{IP})$$

Dokážeme, že potom platí aj

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}.$$

Zoberieme si ľavú stranu a upravujeme ju s využitím indukčného predpokladu.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} &\stackrel{\text{IP}}{=} \\ &\stackrel{\text{IP}}{=} 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = \\ &= 2 - \left(\frac{2n+4}{2^{n+1}} - \frac{n+1}{2^{n+1}} \right) = \\ &= 2 - \frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}} = \\ &= 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Tým sme dokázali, čo sme chceli. Dôkaz indukciou je tak hotový.

Úloha 4

Rozhodnite a následne dokážte, či nasledovný zložený výrok je tautológia

$$(a \vee \neg b) \Rightarrow [((c \vee a) \wedge d) \vee (b \Rightarrow (e \Rightarrow \neg d))]$$

Sporom ukážeme, že zadaný výrok je tautológia. Pre spor predpokladajme, že to nie je tautológia. To znamená, že pre nejaké ohodnotenie elementárnych výrokov a, b, c, d, e je výrok nepravdivý, teda:

1. $\{(a \vee \neg b) \Rightarrow [((c \vee a) \wedge d) \vee (b \Rightarrow (e \Rightarrow \neg d))]\} \Leftrightarrow 0$,
2. $(a \vee \neg b) \Leftrightarrow 1$ (z 1.),
3. $[((c \vee a) \wedge d) \vee (b \Rightarrow (e \Rightarrow \neg d))] \Leftrightarrow 0$ (z 1.),

4. $((c \vee a) \wedge d) \Leftrightarrow 0$ (z 3.),
5. $(b \Rightarrow (e \Rightarrow \neg d)) \Leftrightarrow 0$ (z 3.),
6. $b \Leftrightarrow 1$ (z 5.),
7. $(e \Rightarrow \neg d) \Leftrightarrow 0$ (z 5.),
8. $e \Leftrightarrow 1$ (z 7.),
9. $d \Leftrightarrow 1$ (z 7.),
10. $a \Leftrightarrow 1$ (z 2. a 6.),
11. $(c \vee a) \Leftrightarrow 0$ (z 4. a 9.),
12. $a \Leftrightarrow 0$ a to je spor s 10.