

Riešenia 3. sady domácich úloh

Úloha 1

V triede je 20 chlapcov a 30 dievčat. Mikuláš im doniesol 200 nerozlíšiteľných cukríkov. Koľkými spôsobmi vie Mikuláš rozdeliť deťom cukríky tak, aby všetci chlapci spolu mali iný počet cukríkov ako dievčatá?

Keby sme nemali podmienku, že chlapci a dievčatá dostanú rôzny počet cukríkov, chceli by sme medzi 200 cukríkov vložiť 49 oddeľovačov, ktoré to oddelia na cukríky pre jednotlivé deti. Počet možností je preto $\binom{200+49}{200}$.

Teraz však potrebujeme odpočítať „zlé“ možnosti – t. j. také, v ktorých chlapcom aj dievčatám rozdelíme po 100 cukríkov. Pre chlapcov potrebujeme dať 19 oddeľovačov medzi 100 cukríkov. Pre dievčatá zas 29 oddeľovačov medzi 100 cukríkov. Ku každému rozloženiu cukríkov pre chlapcov vieme priradiť ľubovoľné rozloženie pre dievčatá, čiže použijeme pravidlo súčinu. Zlých možností je teda $\binom{100+19}{100} \cdot \binom{100+29}{100}$.

Výsledný počet možností je preto $\binom{249}{200} - \binom{119}{100} \binom{129}{100}$.

Úloha 2

Uvažujme 52 žolíkových kariet, z ktorých každá má práve jednu z 13 hodnôt a práve jednu zo 4 farieb. Koľkými spôsobmi možno každému z 9 hráčov rozdať 4 karty tak, aby neexistoval hráč, ktorý má všetky 4 karty rovnakej hodnoty?

Poznámka. Pod rozdáním kariet formálne myslíme usporiadanú 9-ticu tvorenú navzájom disjunktnými 4-prvkovými podmnožinami množiny všetkých kariet.

Nech A_i pre $i = 1, 2, \dots, 9$ označuje také rozloženia, kde i -ty hráč má na ruke 4 karty rovnakej hodnoty. Keď chceme spočítať, v koľkých rozloženiach nikto nemá 4 karty rovnakej hodnoty, stačí od všetkých rozložení odpočítať tie, v ktorých má **aspoň** jeden hráč 4 karty rovnakej hodnoty.

Najskôr spočítajme, koľko je všetkých rozložení. Najskôr vyberieme 36 kariet a zoradíme ich, čo je $52 \overline{36} = \frac{52!}{(52-36)!} = \frac{52!}{16!}$. Prvé štyri pôjdu prvému hráčovi, druhému druhé štyri, atď. Na poradí kariet jednotlivého hráča nezáleží, preto tento počet vydelíme $(4!)^9$. Preto celkový počet rozložení je $\frac{52!}{(16!)(4!)^9}$.

Od tohto počtu chceme odpočítať počet rozložení, kde aspoň jeden hráč má 4 karty rovnakej hodnoty, čo je zjednotenie rozložení $A_1, \dots, A_9$. Tam vieme využiť princíp inklúzie a exklúzie.

Určíme počet možností, kde k fixných hráčov má karty rovnakej hodnoty. Najskôr si z 9 hráčov vyberieme týchto k hráčov $\binom{9}{k}$ spôsobmi. Potom určíme, o aké hodnoty ide – to ide $13 \overline{k} = \frac{13!}{(13-k)!}$ spôsobmi. Zostáva nám vybrať $36 - 4k$ kariet pre zvyšných $9 - k$ hráčov, ktoré potom rozdelíme podobne ako predtým, na čo je $(52 - 4k) \overline{36-4k} = \frac{(52-4k)!}{16!(4!)^{9-k}}$ možností. Dostávame sa teda k výsledku

$$\frac{52!}{(16!)(4!)^9} - \sum_{k=1}^9 (-1)^{k+1} \cdot \binom{9}{k} \cdot \frac{13!}{(13-k)!} \cdot \frac{(52-4k)!}{16!(4!)^{9-k}} = \sum_{k=0}^9 (-1)^k \cdot \binom{9}{k} \cdot \frac{13!}{(13-k)!} \cdot \frac{(52-4k)!}{16!(4!)^{9-k}}.$$

Úloha 3

Nech P je množina všetkých permutácií množiny $\{1, 2, \dots, 5\}$. Na množine P definujeme reláciu R tak, že pre každé $(a_0, a_1, \dots, a_4), (b_0, b_1, \dots, b_4) \in P$ platí

$$(a_0, a_1, \dots, a_4)R(b_0, b_1, \dots, b_4) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: \forall i \in \{0, 1, \dots, 4\}: a_i = b_{(i+k) \bmod 5}.$$

a) (1,5 b) Dokážte, že R je relácia ekvivalencie na množine P .

b) (0,5 b) Opíšte rozklad množiny P , ktorý relácia ekvivalencie R indukuje na množine P .

Pre účely nasledujúcich bonusových úloh budeme uvažovať $P = \{1, 2, \dots, n\}$, kde n je kladné celé číslo a

$$(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})R(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}: a_i = b_{(i+k) \bmod n}.$$

c) (0,5 b*) Koľko tried má rozklad pre $n = 47$?

d) (1 b*) Opíšte rozklad všeobecne a formálne pre ľubovoľné kladné celé číslo n . Môžete ho opísať aj napísaním efektívneho programu, ktorý načíta kladné celé číslo n a vypíše rozklad do konzoly: každú triedu vypíše do samostatného riadku tak, že medzerou oddelí prvky triedy.

e) (1 b*) Ako by sa zmenili riešenia predošlých úloh, ak by sme miesto množiny P uvažovali množinu $V = \{1, 2, \dots, 10\}$ ⁴⁷ a $n = 47$?

Ospravedľňujeme sa za chybu v zadaní. V úlohách c) a d) sme chceli množinu P uvažovať ako množinu všetkých permutácií množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ – pri formulovaní zadanie sme nesprávne napísali, že $\{1, 2, \dots, n\}$ je náhrada za množinu P (čo nedáva zmysel), pričom to mala byť náhrada za množinu $\{1, 2, \dots, 5\}$

a) Dôkaz cez symbolické zápisy

Na dokázanie, že R je reláciou ekvivalencie, potrebujeme ukázať, že R je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

Reflexívnosť. Pre každú päťicu $a = (a_0, \dots, a_4) \in P$ a pre $k = 0$ platí $\forall i \in \{0, 1, \dots, 4\}: a_i = a_{(i+0) \bmod 5}$, teda aRa .

Symetrickosť. Nech $(a_0, \dots, a_4), (b_0, \dots, b_4) \in P$. Predpokladajme, že

$$(a_0, \dots, a_4)R(b_0, \dots, b_4),$$

teda pre nejaké $k \in \mathbb{Z}$ platí

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, 4\}: a_i = b_{(i+k) \bmod 5}.$$

Potom pre číslo $-k$, ktoré je celé, platí pre každé $i \in \{0, 1, \dots, 4\}$:

$$a_{(i-k) \bmod 5} = b_{(i-k+k) \bmod 5} = b_i,$$

teda $\forall i \in \{0, 1, \dots, 4\}: b_i = a_{(i-k) \bmod 5}$, čo znamená, že $(b_0, \dots, b_4)R(a_0, \dots, a_4)$.

Tranzitívnosť Nech $(a_0, \dots, a_4), (b_0, \dots, b_4), (c_0, \dots, c_4) \in P$. Predpokladajme, že

$$(a_0, \dots, a_4)R(b_0, \dots, b_4) \wedge (b_0, \dots, b_4)R(c_0, \dots, c_4).$$

Potom

$$\exists k \in \mathbb{Z}: \forall i \in \{0, \dots, 4\}: a_i = b_{(i+k) \bmod 5} \wedge \exists \ell \in \mathbb{Z}: \forall j \in \{0, \dots, 4\}: b_j = c_{(j+\ell) \bmod 5}.$$

Existenčné kvantifikátory môžeme odstrániť a použiť nové označenie pre celé čísla, o ktorej existencii vraví tento výrok. Keďže sme už rovno použili rôzne premenné k, ℓ , tak len existenčné kvantifikátory dáme preč.

$$\forall i \in \{0, \dots, 4\}: a_i = b_{(i+k) \bmod 5} \wedge \forall j \in \{0, \dots, 4\}: b_j = c_{(j+\ell) \bmod 5}.$$

Uvažujme teraz ľubovoľné $i \in \{0, \dots, 4\}$. Pre takéto i platí

$$a_i = b_{(i+k) \bmod 5}. \quad (1)$$

Keďže $b_j = c_{(j+\ell) \bmod 5}$ platí pre všetky $j \in \{0, \dots, 4\}$, tak pre $j = (i+k) \bmod 5$ platí

$$b_{(i+k) \bmod 5} = c_{((i+k) \bmod 5 + \ell) \bmod 5} = c_{(i+k+\ell) \bmod 5}, \quad (2)$$

pričom posledná rovnosť platí na základe pravidiel počítania so zvyškami. Z rovností (1) a (2) dostávame $a_i = c_{(i+k+\ell) \bmod 5}$. Dostali sme tak, že

$$\forall i \in \{0, \dots, 4\}: a_i = c_{(i+k+\ell) \bmod 5}.$$

Keďže $m = k + \ell$ je celé číslo, tak sme dokázali, že

$$\exists m \in \mathbb{Z}: \forall i \in \{0, \dots, 4\}: a_i = c_{(i+m) \bmod 5},$$

teda $(a_0, \dots, a_4)R(c_0, \dots, c_4)$.

Poznámka. Dôkaz sme písali dosť podrobne, aby boli jasné kroky, čo sa tu diali. Stačilo to písať stručnejšie.

a) Slovné dôkazy

Slovne vyjadrené, relácia R dáva do vzťahu také permutácie, kde jedna je cyklickým posunom druhej. Pre stručnosť budeme hovoriť len o posune. S týmto uvedením vieme ľahšie dokázať jednotlivé vlastnosti.

Reflexívnosť. Každá permutácia je posunom samej seba o 0 miest.

Symetrickosť. Ak aRb , tak permutácia b je cyklickým posunom permutácie a o k miest doprava. Potom je permutácia a cyklickým posunom permutácie b o k miest doľava, resp. $-k$ miest doprava, teda bRa .

Tranzitívnosť Nech aRb a bRc . Potom permutácia b je posunom permutácie a o k miest a c je cyklickým posunom permutácie b o ℓ miest. Potom permutáciu c dostaneme z permutácie a posunom o $k + \ell$ miest, preto aRc .

Komentár k rozkladu

Ukázalo sa, že podúloha c) bola ľahšia ako podúloha b). Rozklad indukovaný reláciou ekvivalencie R nie je až tak ľahký na opis. Chceme upozorniť na to, že určiť počet tried nie je dostatočný opis rozkladu. Čo ak by bolo tried nekonečne veľa? To nám veľa nepovie. Okrem toho, že treba napísať, ako vyzerá jedna trieda (čo väčšina zvládla), treba uviesť aj pre každú triedu jeden prvok, ktorý ju charakterizuje. Toto nám aj určuje počet tried – to ilustrujeme na druhom riešení úlohy c) – no dáva nám to viac informácie a je to použiteľné všeobecne, aj keď máme nekonečne veľa tried.

Za absenciu takéhoto opisu rozkladu sme strhávali 0,2 boda. Avšak určenie počtu tried sme započítali do úlohy c). Pre lepšiu ilustráciu tohto problému si pozrite minulé domáce úlohy, napr. prvú úlohu 3. sady roku 2024. Tam aj ukazujeme, ako dokázať, že sme rozklad opísali správne, čo sme teraz nevyžadovali.

b) Rozklad

Trieda pre permutáciu $(a_0, \dots, a_4)$ je tvorená všetkými permutáciami, ktoré možno z nej dostať cyklickým posunom. Pre každú triedu určíme jedného jej reprezentanta. To sa dá napríklad tak, že permutáciu posunieme tak, aby sa začínala číslom 1. Rozklad bude teda obsahovať pre každú permutáciu začínajúcu jednotkou triedu všetkých jej cyklických posunov.

Rozklad vieme aj celý vypísať. Vyzerá takto:

$$\begin{aligned} &\{(1, 2, 3, 4, 5), (2, 3, 4, 5, 1), (3, 4, 5, 1, 2), (4, 5, 1, 2, 3), (5, 1, 2, 3, 4)\}, \\ &\{(1, 2, 3, 5, 4), (2, 3, 5, 4, 1), (3, 5, 4, 1, 2), (5, 4, 1, 2, 3), (4, 1, 2, 3, 5)\}, \\ &\{(1, 2, 4, 3, 5), (2, 4, 3, 5, 1), (4, 3, 5, 1, 2), (3, 5, 1, 2, 4), (5, 1, 2, 4, 3)\}, \\ &\{(1, 2, 4, 5, 3), (2, 4, 5, 3, 1), (4, 5, 3, 1, 2), (5, 3, 1, 2, 4), (3, 1, 2, 4, 5)\}, \\ &\{(1, 2, 5, 3, 4), (2, 5, 3, 4, 1), (5, 3, 4, 1, 2), (3, 4, 1, 2, 5), (4, 1, 2, 5, 3)\}, \\ &\{(1, 2, 5, 4, 3), (2, 5, 4, 3, 1), (5, 4, 3, 1, 2), (4, 3, 1, 2, 5), (3, 1, 2, 5, 4)\}, \\ &\{(1, 3, 2, 4, 5), (3, 2, 4, 5, 1), (2, 4, 5, 1, 3), (4, 5, 1, 3, 2), (5, 1, 3, 2, 4)\}, \\ &\{(1, 3, 2, 5, 4), (3, 2, 5, 4, 1), (2, 5, 4, 1, 3), (5, 4, 1, 3, 2), (4, 1, 3, 2, 5)\}, \\ &\{(1, 3, 4, 2, 5), (3, 4, 2, 5, 1), (4, 2, 5, 1, 3), (2, 5, 1, 3, 4), (5, 1, 3, 4, 2)\}, \\ &\{(1, 3, 4, 5, 2), (3, 4, 5, 2, 1), (4, 5, 2, 1, 3), (5, 2, 1, 3, 4), (2, 1, 3, 4, 5)\}, \\ &\{(1, 3, 5, 2, 4), (3, 5, 2, 4, 1), (5, 2, 4, 1, 3), (2, 4, 1, 3, 5), (4, 1, 3, 5, 2)\}, \\ &\{(1, 3, 5, 4, 2), (3, 5, 4, 2, 1), (5, 4, 2, 1, 3), (4, 2, 1, 3, 5), (2, 1, 3, 5, 4)\}, \\ &\{(1, 4, 2, 3, 5), (4, 2, 3, 5, 1), (2, 3, 5, 1, 4), (3, 5, 1, 4, 2), (5, 1, 4, 2, 3)\}, \\ &\{(1, 4, 2, 5, 3), (4, 2, 5, 3, 1), (2, 5, 3, 1, 4), (5, 3, 1, 4, 2), (3, 1, 4, 2, 5)\}, \\ &\{(1, 4, 3, 2, 5), (4, 3, 2, 5, 1), (3, 2, 5, 1, 4), (2, 5, 1, 4, 3), (5, 1, 4, 3, 2)\}, \\ &\{(1, 4, 3, 5, 2), (4, 3, 5, 2, 1), (3, 5, 2, 1, 4), (5, 2, 1, 4, 3), (2, 1, 4, 3, 5)\}, \\ &\{(1, 4, 5, 2, 3), (4, 5, 2, 3, 1), (5, 2, 3, 1, 4), (2, 3, 1, 4, 5), (3, 1, 4, 5, 2)\}, \\ &\{(1, 4, 5, 3, 2), (4, 5, 3, 2, 1), (5, 3, 2, 1, 4), (3, 2, 1, 4, 5), (2, 1, 4, 5, 3)\}, \\ &\{(1, 5, 2, 3, 4), (5, 2, 3, 4, 1), (2, 3, 4, 1, 5), (3, 4, 1, 5, 2), (4, 1, 5, 2, 3)\}, \\ &\{(1, 5, 2, 4, 3), (5, 2, 4, 3, 1), (2, 4, 3, 1, 5), (4, 3, 1, 5, 2), (3, 1, 5, 2, 4)\}, \\ &\{(1, 5, 3, 2, 4), (5, 3, 2, 4, 1), (3, 2, 4, 1, 5), (2, 4, 1, 5, 3), (4, 1, 5, 3, 2)\}, \\ &\{(1, 5, 3, 4, 2), (5, 3, 4, 2, 1), (3, 4, 2, 1, 5), (4, 2, 1, 5, 3), (2, 1, 5, 3, 4)\}, \\ &\{(1, 5, 4, 2, 3), (5, 4, 2, 3, 1), (4, 2, 3, 1, 5), (2, 3, 1, 5, 4), (3, 1, 5, 4, 2)\}, \\ &\{(1, 5, 4, 3, 2), (5, 4, 3, 2, 1), (4, 3, 2, 1, 5), (3, 2, 1, 5, 4), (2, 1, 5, 4, 3)\}. \end{aligned}$$

c) Počet tried

Každá trieda obsahuje cyklické posuny nejakej permutácie. Permutáciu 47 prvkov možno posunúť 47 spôsobmi a každý z nich je jedinečný – napr. na prvom mieste budeme mať vždy iné číslo, keďže máme permutáciu a v nej sa neopakujú prvky. Teda každá trieda má 47 prvkov. Všetkých permutácií množiny $\{1, 2, \dots, 47\}$ je $47!$, teda počet tried je

$$\frac{47!}{47} = 46!.$$

Iné riešenie. Z riešenia b) vieme, že triedy možno jednoznačne určiť permutáciami, ktoré začínajú jednotkou. Na zvyšných 46 miestach je permutácia 46 prvkov a tých je $46!$. To je teda aj počet tried.

d) Formálny opis rozkladu

Dôležité myšlienky sme už uvideli v riešení časti b). Jednu triedu vieme vyjadriť napr. ako

$$R[(a_0, \dots, a_{n-1})] = \{(a_k, a_{(k+1) \bmod n}, \dots, a_{(k+n-1) \bmod n}); k \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}.$$

Rozklad sa skladá z týchto tried pre každú permutáciu $(1, a_1, \dots, a_{n-1})$ začínajúcu sa jednotkou.

Celý rozklad možno formálne vyjadriť aj ako

$$\{ \{ (a_k, a_{(k+1) \bmod n}, \dots, a_{(k+n-1) \bmod n}); k \in \mathbb{Z} \}; (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in P \wedge a_0 = 1 \}.$$

Na základe toho vieme aj napísať program, ktorý tento rozklad pre zadané n vypíše. Vonkajší for cyklus zodpovedá prechádzaniu všetkých permutácií začínajúcich jednotkou $((a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in P \wedge a_0 = 1)$, vnútorný for cyklus zas prechádzaniu posunov $(k \in \mathbb{Z})$.

```
from itertools import permutations

n = int(input())

# Prejdeme vsetkych reprezentantov triedy - vsetky permutacie cisel 1, 2, ..., n,
# ktore sa zacinaju cislom 1. Staci nam teda prejsť moznosti na zvyšných n - 1 pozíciách
for a in permutations(range(2, n + 1)):
    # Pridame na začiatok 1-ku
    a = (1,) + a
    # Vypíšeme triedu reprezentanta a - triedu obsahujúcu všetky jej cyklické posuny
    for k in range(n):
        # Vypíšeme cyklický posun o k miest doprava
        if k > 0:
            print(end=' ')
        print(a[k:] + a[:k], end='')
    print()
```

e) Počet tried iného rozkladu

Relácia R bude reláciou ekvivalencie aj na množine V – nikde sme nevyužili, že ide o permutácie. Dôležité bolo, že ide o postupnosť.

Množina V má 10^{47} prvkov. Ukážeme, že rozklad, ktorý relácia R indukuje, má triedy dvoch typov:

- Postupnosť $(a, a, \dots, a)$ pre $a \in V$ je v relácii R len sama zo sebou – všetky jej cyklické posuny sú totožné s ňou. Takýchto tried je 10 a každá z nich má 1 prvok.
- Uvažujme postupnosť $(a_0, a_1, \dots, a_{46})$ takú, že nie všetky jej členy sú rovnaké. Ukážeme, že sa nachádza v triede veľkosti 47. Pre spor predpokladajme, že pre nejaké $k \in \{1, 2, \dots, 46\}$ platí $(a_0, a_1, \dots, a_{47}) = (a_k, a_{(k+1) \bmod 47}, \dots, a_{(k+46) \bmod 47})$, teda pre každé $i \in \{0, 1, \dots, 46\}$ platí $a_i = a_{(i+k) \bmod 47}$. Takto dostávame, že $a_0 = a_k = a_{2k \bmod 47} = \dots = a_{46k \bmod 47}$. Ukážeme, že takto sme dostali všetky prvky našej postupnosti. Ak by pre nejaké dve rôzne $i, j \in \{0, 1, \dots, 46\}$ platilo, že ik aj jk majú rovnaký zvyšok po delení 47, tak $47 \mid ik - jk = (i - j)k$. Rozdiel i, j je z množiny $\{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm 46\}$. Keďže 47 je prvočíslo, tak rozdiel $i - j$ ním nie je deliteľný. Preto $47 \mid k$, teda $k = 0$, čo je spor. Preto v sérii rovností $a_0 = a_k = a_{2k \bmod 47} = \dots = a_{46k \bmod 47}$ sú zahrnuté všetky členy postupnosti a dostávame spor.

Takto sme ukázali, že postupnosť $(a_0, a_1, \dots, a_{47})$, ktorá obsahuje aspoň dva rôzne členy, je v triede celkovo so 47 prvkami. Takýchto postupností je $10^{47} - 10$ a keďže každá z nich je v triede veľkosti 47, tak týchto tried je $(10^{47} - 10)/47$.

Celkový počet tried je teda

$$10 + \frac{10^{47} - 10}{47}.$$

Zaujímavosti

Rovnaký výsledok ako v c) má kombinatorická úloha: „Koľkými spôsobmi možno 47 ľudí usadiť okolo okrúhleho stola, ak možnosti líšiace sa len otočením považujeme za rovnaké?“ Pokiaľ by sme túto úlohu chceli formulovať vo formálnom matematickom jazyku, tak by to vyzeralo takto. Relácie ekvivalencie vieme využiť na formulovanie toho, že na niečom nám pri počítaní možností nezáleží.

Zaujímavým dôsledkom tejto podúlohy e) je nasledovné uvedomenie. Počet tried musí byť prirodzené číslo. Preto číslo $(10^{47} - 10)/47$ musí byť celé. To znamená, že číslo $10^{47} - 10$ je deliteľné číslom 47. Tento výsledok sa dá ľahko zovšeobniť: číslo 10 vieme nahradiť ľubovoľným prirodzeným číslom n a miesto 47 môžeme použiť ľubovoľné prvočíslo p . Rovnako sa dá ukázať, že číslo $n^p - n$ musí byť deliteľné číslom p , keďže tento zlomok predstavuje počet tried rozkladu, teda musí ísť o prirodzené číslo. Toto tvrdenie je jedna z ekvivalentných podôb malej Fermatovej vety a podúloha e) obsahuje hlavnú myšlienku jej kombinatorického dôkazu.