

3. sada domácich úloh

Termín odovzdania: **utorok 2. 12. 2025, 23:59**

Všetci ľudia v úlohe sú navzájom rozlíšiteľní.

Úloha 1. (1 bod) V triede je 20 chlapcov a 30 dievčat. Mikuláš im doniesol 200 nerozlíšiteľných cukríkov. Koľkými spôsobmi vie Mikuláš rozdeliť deťom cukríky tak, aby všetci chlapci spolu mali iný počet cukríkov ako dievčatá?

Úloha 2. (2 body) Uvažujme 52 žolíkových kariet, z ktorých každá má práve jednu z 13 hodnôt a práve jednu zo 4 farieb. Koľkými spôsobmi možno každému z 9 hráčov rozdať 4 karty tak, aby neexistoval hráč, ktorý má všetky 4 karty rovnakej hodnoty?

Poznámka. Pod rozdáním kariet formálne myslíme usporiadanú 9-ticu tvorenú navzájom disjunktnými 4-prvkovými podmnožinami množiny všetkých kariet.

Úloha 3. (2 body) Nech P je množina všetkých permutácií množiny $\{1, 2, \dots, 5\}$. Na množine P definujeme reláciu R tak, že pre každé $(a_0, a_1, \dots, a_4), (b_0, b_1, \dots, b_4) \in P$ platí

$$(a_0, a_1, \dots, a_4)R(b_0, b_1, \dots, b_4) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: \forall i \in \{0, 1, \dots, 4\}: a_i = b_{(i+k) \bmod 5}.$$

- a) (1,5 b) Dokážte, že R je relácia ekvivalencie na množine P .
- b) (0,5 b) Opíšte rozklad množiny P , ktorý relácia ekvivalencie R indukuje na množine P .

Pre účely nasledujúcich bonusových úloh budeme uvažovať $P = \{1, 2, \dots, n\}$, kde n je kladné celé číslo a

$$(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})R(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}: a_i = b_{(i+k) \bmod n}.$$

- c) (0,5 b) Koľko tried má rozklad pre $n = 47$?
- d) (1 b) Opíšte rozklad všeobecne a formálne pre ľubovoľné kladné celé číslo n . Môžete ho opísať aj napísaním efektívneho programu, ktorý načíta kladné celé číslo n a vypíše rozklad do konzoly: každú triedu vypíše do samostatného riadku tak, že medzerou oddelí prvky triedy.
- e) (1 b) Ako by sa zmenili riešenia predošlých úloh, ak by sme miesto množiny P uvažovali množinu $V = \{1, 2, \dots, 10\}^{47}$ a $n = 47$?

Bonus. (2 body) V závislosti od prirodzených čísel m, n , pre ktoré platí $m \leq n$, určte hodnotu sumy

$$\sum_{k=m}^n (-1)^{k-m} \binom{k}{m} \binom{n}{k}.$$