

Riešenia 4. sady domácich úloh

Úloha 1

Na množine $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ definujeme reláciu $\sqsubseteq$ tak, že pre ľubovoľné $a, b \in \mathbb{N}$ platí

$$a \sqsubseteq b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}: b^2 - a^2 = 9k.$$

Dokážte, že $\sqsubseteq$ je reláciou usporiadania na množine $\mathbb{N}$ a určte všetky jej minimálne, najmenšie, maximálne a najväčšie prvky. Správnosť vašich výsledkov dokážte.

Dôkaz usporiadania

Reflexívnosť. Pre každé $a \in \mathbb{N}$ platí $a^2 - a^2 = 0 = 9 \cdot 0$, teda $a \sqsubseteq a$.

Antisymetrickosť. Pre každé $a, b \in \mathbb{N}$ platí:

$$\begin{aligned} a \sqsubseteq b \wedge b \sqsubseteq a \\ \Downarrow \\ \exists k \in \mathbb{N}: b^2 - a^2 = 9k \wedge \exists \ell \in \mathbb{N}: a^2 - b^2 = 9\ell \\ \Downarrow \\ 9k = b^2 - a^2 = -(a^2 - b^2) = -9\ell \\ \Downarrow \\ 9k = -9\ell \\ \Downarrow \\ k + \ell = 0 \end{aligned}$$

Keďže $k, \ell \in \mathbb{N}$, tak z toho vyplýva $k = \ell = 0$, teda $b^2 - a^2 = 0$, čo pre $a, b \in \mathbb{N}$ znamená, že $a = b$.

Tranzitívnosť. Pre každé $a, b, c \in \mathbb{N}$ platí:

$$\begin{aligned} a \sqsubseteq b \wedge b \sqsubseteq c \\ \Downarrow \\ \exists k \in \mathbb{N}: b^2 - a^2 = 9k \wedge \exists \ell \in \mathbb{N}: c^2 - b^2 = 9\ell \\ \Downarrow \\ b^2 - a^2 + c^2 - b^2 = 9k + 9\ell \\ \Downarrow \\ c^2 - a^2 = 9(k + \ell) \\ \Downarrow \\ m = k + \ell \in \mathbb{N} \\ \Downarrow \\ \exists m \in \mathbb{N}: c^2 - a^2 = 9m \\ \Downarrow \\ a \sqsubseteq c \end{aligned}$$

Hasseho diagram

Túto časť nie je nutné uvádzať v riešení. Uvádzame ju pre lepšiu predstavu, ako vyzerá naša usporiadaná množina. Načrtne si Hasseho diagram, v ktorom prvky rastú zľava doprava.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \text{---} & 3 & \text{---} & 6 & \text{---} & 9 & \text{---} & 12 & \text{---} & \dots \\ & & 1 & \text{---} & 8 & \text{---} & 10 & \text{---} & 17 & \text{---} & \dots \\ & & 2 & \text{---} & 7 & \text{---} & 11 & \text{---} & 16 & \text{---} & \dots \\ & & 4 & \text{---} & 5 & \text{---} & 13 & \text{---} & 14 & \text{---} & \dots \end{array}$$

Na ňom si môžeme všimnúť pomerne peknú štruktúru našej usporiadanej množiny. Z nej už ľahko vidíme, že minimálne prvky sú 0, 1, 2, 4. Avšak argumentovať diagramom nemôžeme – nemáme ho nakreslený celý. Uvedieme preto dva dôkazy. Jeden úplne nezávislý na tejto štruktúre, v druhom zdôvodníme, že táto usporiadaná množina má štruktúru, akú vidíme na diagrame.

Minimálne prvky sú 0, 1, 2, 4.

Dôkaz minimálnych z definície. Najprv ukážeme, že každý z nich je minimálny:

- $a \sqsubseteq 0 \Rightarrow 0 - a^2 = 9k \Rightarrow a^2 = -9k \Rightarrow a = 0 \wedge k = 0$, keďže $-a^2 \leq 0$.
- $a \sqsubseteq 1 \Rightarrow 1 - a^2 = 9k \Rightarrow a^2 = 1 - 9k \Rightarrow a = 1 \wedge k = 0$, keďže pre $k > 0$ je $1 - 9k < 0$.
- $a \sqsubseteq 2 \Rightarrow 4 - a^2 = 9k \Rightarrow a^2 = 4 - 9k \Rightarrow a = 2 \wedge k = 0$, keďže pre $k > 0$ je $4 - 9k < 0$.
- $a \sqsubseteq 4 \Rightarrow 16 - a^2 = 9k \Rightarrow a^2 = 16 - 9k \Rightarrow a = 4 \wedge k = 0$, keďže pre $k = 1$ máme $a^2 = 7$, čo nemá v prirodzených číslach riešenie, a pre $k \geq 2$ je $16 - 9k < 0$, čo tiež nemá riešenie.

A ešte ukážeme, že iné prvky nie sú minimálne:

- 3 nie je minimálny $\Leftarrow 0 \sqsubset 3 \Leftarrow 3^2 - 0^2 = 9 = 9 \cdot 1$
- $\forall a \in \{5, 6, 7, 8\}$: a nie je minimálny $\Leftarrow 9 - a \sqsubset a \Leftarrow a^2 - (9 - a)^2 = (a + 9 - a)(a - 9 + a) = 9(2a - 9)$, pričom $9 - a$ aj $2a - 9$ sú pre tieto a prirodzené čísla
- $\forall a \in \mathbb{N}, a \geq 9$: a nie je minimálny $\Leftarrow (a - 9) \sqsubset a \Leftarrow a^2 - (a - 9)^2 = (a + a - 9)(a - a + 9) = 9(2a - 9)$, pričom $2a - 9 \in \mathbb{N}$ a aj $a - 9 \in \mathbb{N}$.

Dôkaz minimálnych cez štruktúru usporiadania. Nech platí $\exists k \in \mathbb{N}: b^2 - a^2 = 9k$. Potom:

- $b^2 - a^2$ je deliteľné deviatimi, teda čísla a^2, b^2 majú rovnaký zvyšok po delení deviatimi.
- Keďže $k \in \mathbb{N}$, teda $k \geq 0$, tak aj $b^2 - a^2 \Rightarrow b^2 \geq a^2$, čo v prirodzených číslach znamená $b \geq a$.

Platí to aj opačne: ak máme $b \geq a$ také, že $9 \mid (b^2 - a^2)$, tak nájdené $k = (b^2 - a^2)/9$ bude nezáporné a celé, teda prirodzené.

To znamená, že porovnateľné sú len čísla, ktorých druhé mocniny dávajú rovnaký zvyšok po delení 9, a v tom prípade ich porovnáme na základe bežného usporiadania $\leq$. Zvyšok druhej mocniny prirodzeného čísla a závisí len na jeho zvyšku po delení deviatimi. Vyskúšame všetky možné zvyšky:

$a \bmod 9 =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$a^2 \bmod 9 =$	0	1	4	0	7	7	0	4	1

Teda druhé mocniny celých čísel dávajú po delení deviatimi len zvyšky 0, 1, 4 a 7. Preto naša usporiadaná množina naozaj vyzerá tak, ako na obrázku. Všetky prirodzené čísla sú rozdelené do 4 množín podľa zvyšku ich druhej mocniny po delení 9 a v rámci týchto množín sú usporiadané podľa veľkosti. Preto sú minimálnymi prvkami čísla 0, 1, 2 a 4.

Najmenší prvok neexistuje, keďže máme aspoň dva minimálne prvky.

Maximálne prvky neexistujú, keďže pre každé $a \in \mathbb{N}$ platí $a \sqsubset a + 9$, keďže $(a + 9)^2 - a^2 = a^2 + 18a + 81 - a^2 = 9(2a + 9)$ a $2a + 9 \in \mathbb{N}$.

Najväčší prvok neexistuje, keďže neexistuje maximálny prvok.

Komentár Chceme upozorniť na problémy pri zdôvodňovaní, že neexistuje najmenší / najväčší prvok:

- „Najmenší prvok neexistuje, lebo existujú neporovnateľné prvky napr. 0 a 1.“ Toto nie je správny dôkaz. Napr. množina $\mathbb{N}$ usporiadaná reláciou $|$ (delí) má najmenší prvok 1 napriek tomu, že prvky 2 a 3 sú neporovnateľné.
- „Najmenší prvok neexistuje, lebo nemáme práve jeden minimálny prvok.“ Toto je správny dôvod, len chceme upozorniť, že ide len o jednosmernú implikáciu. Pokiaľ máme len jeden minimálny prvok, ešte to neznamena, že ide o najmenší (príklad by ste mali byť schopní vymyslieť, je to užitočné cvičenie k príprave na skúšku).
- „Najväčší prvok neexistuje, lebo množina $\mathbb{N}$ je zhora neohraničená.“ Toto je úplne irelevantný argument, lebo hovorí o bežnom usporiadaní $\leq$ a nie o usporiadaní $\sqsubseteq$, o ktorom je úloha. Napr. usporiadaná množina $(\mathbb{N}, |)$ má najväčší prvok 0.

Úloha 2

Nech M je množina všetkých nekonečných binárnych postupností (teda každý člen je 0 alebo 1), ktoré neobsahujú tri jednotky vedľa seba a zároveň neobsahujú dve nuly vedľa seba. Rozhodnite a následne dokážte, či je množina M spočítateľná.

Riešenie cez injekciu

Definujme zobrazenie $f: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow M$, ktoré každej binárnej postupnosti $a = (a_0, a_1, \dots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ priradí postupnosť nasledovne: pre každé $i \in \mathbb{N}$ nahradí a_i postupnosťou $(1, 0)$, ak $a_i = 0$, alebo postupnosťou $(1, 1, 0)$, ak $a_i = 1$; potom všetky tieto postupnosti spojí do jednej. Takto dostaneme postupnosť zloženú z blokov $(1, 0)$ a $(1, 1, 0)$, ktorá zjavne neobsahuje $(0, 0)$ ani $(1, 1, 1)$, teda je v množine M . Keďže každý blok sa končí nulou, vieme tieto bloky jednoznačne spätne identifikovať. Ak sa dve postupnosti a, b líšia na i -tom mieste, tak ich obrazy $f(a), f(b)$ sa budú líšiť v i -tom bloku. Preto $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$, teda zobrazenie f je injektívne.

Keďže sme našli injekciu $f: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow M$, tak toto zobrazenie je zároveň bijekciou medzi $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ a oborom hodnôt $H(f)$ (ktorý je vlastne tvorený tými postupnosťami z M , ktoré sa začínajú jednotkou). Z prednášky vieme, že množina $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ je nespočítateľná, preto je nespočítateľná aj množina $H(f)$. Keďže $H(f) \subseteq M$, tak aj množina M je nespočítateľná.

Riešenie cez bijekciu

V úlohe sa dala tiež nájsť aj bijekcia. Uvedieme rovno dve, jedným aj druhým smerom, čo využijeme pri zdôvodnení, že naozaj ide o bijekciu.

Definujeme zobrazenie $f: \{0,1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow M$, ktoré každej nekonečnej binárnej postupnosti $a = (a_0, a_1, a_2, \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ priradí postupnosť z M tak, že začne s postupnosťou $b = (0)$, ak $a_0 = 0$, alebo s prázdnu postupnosťou $b = ()$, ak $a_0 = 1$. Potom postupne pre každé $i \in \mathbb{N}^+$:

- ak $a_i = 0$, tak na koniec postupnosti b pridá $(1, 0)$;
- ak $a_i = 1$, tak na koniec postupnosti b pridá $(1, 1, 0)$.

Takto vytvorená postupnosť $b = f(a)$ obsahuje len 0 a 1 neobsahuje $(0, 0)$ ani $(1, 1, 1)$: Po prvom kroku môže mať $(1, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1, 0)$, čo sedí. Po prvom a každom ďalšom kroku vytvárania sa končí na $(1, 0)$, k čomu môžeme pridať aj $(1, 0)$, aj $(1, 1, 0)$ (ak by sme chceli byť veľmi poriadni, tak by sme to mali dokázať indukciou). Teda naozaj ide o zobrazenie do množiny M .

Definujeme zobrazenie $g: M \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, ktoré zobrazí postupnosť $b = (b_0, b_1, \dots) \in M$ na binárnu postupnosť nasledovne. Keďže postupnosť b neobsahuje $(0, 0)$, tak ju nuly delia na niekoľko úsekov jednotiek. Keďže b neobsahuje $(1, 1, 1)$, tak medzi nulami máme vždy jednu alebo dve jednotky. Akurát pred prvou nulou sa môžu nachádzať 0, 1 aj 2 jednotky. Postupnosť b má teda tvar

$$(0, 1^{a_0}, 0, 1^{a_1}, 0, 1^{a_2}, 0, \dots) \quad \text{alebo} \quad (1^{a_0}, 0, 1^{a_1}, 0, 1^{a_2}, 0, \dots),$$

kde $a_i \in \{1, 2\}$ pre každé $i \in \mathbb{N}$ a 1^c značí úsek c jednotiek po sebe. Postupnosť b zobrazíme na

$$g(b) = (c, a_0 - 1, a_1 - 1, a_2 - 1, \dots),$$

kde $c = 0$ ak sa postupnosť b začína nulou, inak $c = 1$.

Ľahko overíme, že $f \circ g$ aj $g \circ f$ sú identity, preto sú obe zobrazenia bijekcie [Škoviera, Tvrdenie 2.9].

Riešenie cez diagonálnu metódu

Pre spor predpokladajme, že množina M je spočítateľná. Potom možno všetky jej prvky zoradiť do postupnosti $(a_0, a_1, \dots)$. Prvok na j -tom mieste postupnosti a_i budeme označovať $a_{i,j}$. Teraz definujeme postupnosť b pomocou nasledovného algoritmu. Začneme s postupnosťou $b = (0, 1)$ dĺžky 2. Potom postupne pre každé $n \in \mathbb{N}$ vykonáme nasledovné:

- (i) Nech i je dĺžka doterajšej postupnosti $b = (b_0, b_1, \dots, b_{i-1})$.
- (ii) Ak $a_{n,i} = 0$, tak b predĺžime na postupnosť $(b_0, b_1, \dots, b_{i-1}, 1, 0, 1)$.
- (iii) Ak $a_{n,i} = 1$, tak b predĺžime na postupnosť $(b_0, b_1, \dots, b_{i-1}, 0, 1)$.

Pred každým krokom $n \in \mathbb{N}$ sa postupnosť b končí na $(0, 1)$ a neobsahuje ani tri jednotky po sebe, ani dve nuly po sebe (takejto vlastnosti sa hovorí invariant). To dokážeme priamočiaro matematickou indukciou:

1. Pred krom 0 máme $b = (0, 1)$, čo sedí.
2. Ak pred krokom n sa b končí na $(0, 1)$, tak v krokoch (ii) a (iii) nevytvoríme ani tri jednotky, ani dve nuly. Taktiež sa bude nová postupnosť b (pred krokom $n + 1$) bude končiť na $(0, 1)$.

Keďže b je binárna postupnosť neobsahujúca $(1, 1, 1)$ ani $(0, 0)$, tak patrí do M a teda sa nachádza v postupnosti $(a_0, a_1, \dots)$.

Navyše, krokom (ii) alebo (iii) si zaručíme, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ sa postupnosť b líši od postupnosti a_n na indexe i (podľa vtedajšej hodnoty i). Preto sa postupnosť b nenachádza v postupnosti $(a_0, a_1, \dots)$, čo je spor s predošlým odsekom.

Poznámka. Spôsobov, ako tvoriť postupnosť b je mnoho, najmä takýchto algoritmických. Dôležité je uvedomiť si, že nemusíme ísť čisto po diagonále a vieme ovplyvňovať, ktorý prvok zmeníme z postupnosti a_n .

Úloha 3

Uvažujme graf G , ktorého vrcholy tvoria všetky 100-členné postupnosti núl a jednotiek. Hranami sú spojené tie postupnosti, ktoré sa líšia práve v jednej pozícii (teda napr. $\{0100 \dots 0, 1100 \dots 0\} \in E(G)$, ale $\{0100 \dots 0, 1000 \dots 0\} \notin E(G)$). Určte:

- a) Koľko hrán má graf G ?
- b) Je graf G eulerovský?
- c) Je graf G súvislý?
- d) Je graf G bipartitný?

Vaše tvrdenia dokažte.

Podúloha a)

Keďže vrcholmi grafu sú všetky 100-prvkové binárne postupnosti, a pre každý člen takejto postupnosti máme práve dve možnosti, vrcholov grafu je 2^{100} .

Pre konkrétny vrchol máme 100 možností, ako ju zmeniť tak, aby sa novovzniknutá postupnosť líšila práve v jednej pozícii, preto stupeň každého vrchola je 100.

Vieme, že súčet stupňov vrcholov je rovný dvojnásobku počtu hrán, a preto počet hrán je rovný

$$\frac{2^{100} \cdot 100}{2} = 2^{99} \cdot 100.$$

Iné riešenie. Hrana reprezentuje neusporiadanú dvojicu postupností, ktoré sa líšia v práve jednom člene. Preto nám stačí spočítať takéto množiny. Máme 100 možností, v ktorom člene nastáva zmena. V tomto člene má jedna z postupností 0 a tá druhá 1. Ostáva určiť členy na zvyšných 99 pozíciách, v ktorých sa naše postupnosti zhodujú, na čo máme 2^{99} možností. Počet hrán je preto $100 \cdot 2^{99}$.

Podúloha c)

Pre potreby domácej úlohy nám stačil neformálny opis myšlienky nasledovného dôkazu, no ukážeme, ako by sa úloha dala dokázať formálne.

Matematickou indukciou vzhľadom na počet prvkov d , v ktorých sa líšia postupnosti u, v , ukážeme, že medzi u a v existuje sled.

- 1° báza – Ak sa u, v líšia v $d = 1$ prvku, zo zadania medzi nimi existuje hrana. Tým teda máme sled z u do v .
- 2° indukčný krok – Predpokladajme, že pre všetky postupnosti, ktoré sa líšia v k pozíciách, existuje medzi nimi sled. Nech teraz u, v sú postupnosti, ktoré sa líšia v $k + 1$ pozíciách. Zmeňme v u jeden zo symbolov, v ktorom sa u a v líšia, na opačný. Dostaneme tak postupnosť u' , ktorá sa od u líši v jednom symbole (a teda sú spojené hranou) a od v v k symboloch (čiže z indukčného predpokladu existuje sled z u' do v). Spojením týchto dvoch informácií dostávame aj sled z u do v , čo sme chceli dokázať.

Zároveň si uvedomme, že pri prechádzaní vrcholmi v predošlom dôkaze vždy znížime počet symbolov, v ktorom sa aktuálny vrchol líši od v . Preto sa nám v nájdenom slede neopakujú vrcholy, a teda ide o cestu.

Tým sme ukázali, že medzi každými dvoma vrcholmi grafu existuje cesta, a teda tento graf je súvislý.

Podúloha b)

Graf je eulerovský práve vtedy, keď je súvislý a všetky jeho vrcholy majú párny stupeň. Súvislosť máme z časti c) a v časti a) sme zistili, že všetky vrcholy majú stupeň 100, čiže zadaný graf je eulerovský.

Podúloha d)

Rozdelíme vrcholy grafu na dve množiny – A nech je množina takých postupností, ktoré obsahujú párny počet jednotiek a B zas tých s nepárnym počtom jednotiek. Keďže vrcholy spojené hranou sa líšia v práve jednej pozícii, počty jednotiek v nich sa líšia o ± 1 . To ale znamená, že hrana nám vždy musí spájať vrcholy s rôznou paritou počtu jednotiek, čiže skúmaný graf je bipartitný.