

4. sada domácich úloh

Termín odovzdania: **pondelok 22. 12. 2025, 23:59**

Maximálny možný zisk bodov je zámerne o 0,5 boda viac.

Úloha 1. (2 body) Na množine $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ definujeme reláciu $\sqsubseteq$ tak, že pre ľubovoľné $a, b \in \mathbb{N}$ platí

$$a \sqsubseteq b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}: b^2 - a^2 = 9k.$$

Dokážte, že $\sqsubseteq$ je reláciou usporiadania na množine $\mathbb{N}$ a určte všetky jej minimálne, najmenšie, maximálne a najväčšie prvky. Správnosť vašich výsledkov dokážte.

Úloha 2. (1,5 boda) Nech M je množina všetkých nekonečných binárnych postupností (teda každý člen je 0 alebo 1), ktoré neobsahujú tri jednotky vedľa seba a zároveň neobsahujú dve nuly vedľa seba. Rozhodnite a následne dokážte, či je množina M spočítateľná.

Úloha 3. (2 body) Uvažujme graf G , ktorého vrcholy tvoria všetky 100-členné postupnosti núl a jednotiek. Hranami sú spojené tie postupnosti, ktoré sa líšia práve v jednej pozícii (teda napr. $\{0100\dots 0, 1100\dots 0\} \in E(G)$), ale $\{0100\dots 0, 1000\dots 0\} \notin E(G)$). Určte:

- a) Koľko hrán má graf G ?
- b) Je graf G eulerovský?
- c) Je graf G súvislý?
- d) Je graf G bipartitný?

Vaše tvrdenia dokážte.