

Geometria trojuholníka

Jozef Rajník

Tento materiál vznikol ako záverečná práca rozširujúceho štúdia matematiky pod vedením doc. RNDr. Jany Kopfovej, Ph.D.

Požiadavky a pomôcky

Materiál je písaný tak, aby sa dal používať aj žiakmi, aj učiteľmi. V materiáli predpokladáme, že žiaci spĺňajú požiadavky, ktoré na nich kladie iŠVP aj ŠVP. Najmä očakávame, že žiaci vedia:

- aplikovať vzťah o súčte vnútorných uhlov v trojuholníku a štvoruholníku;
- identifikovať vrcholové, striedavé, súhlasné a striedavé uhly a využiť ich pri riešení geometrických úloh;
- aplikovať vzťahy o zhodných uhloch pri základni rovnoramenného trojuholníka pri riešení úloh;
- aplikovať vety o zhodnosti a podobnosti trojuholníkov vo výpočtových úlohách.

Nie je však potrebné, aby žiaci poznali pojmy, vzťahy a postupy predstavované v tomto materiáli, hoci sa v iŠVP alebo ŠVP objavujú.

Pri používaní materiálu je potrebné mať písacie pomôcky. Niektoré úlohy môžu vyžadovať použitie kružidla a pravítka, resp. ich použitie môže uľahčiť prácu s úlohou. Ďalšie pomôcky závisia od konkrétnej formy použitia. V prípade, že učiteľ chce použiť materiál v triede s viacerými žiakmi, môže byť vhodné využiť tabuľu, prípadne vytlačené úlohy pre žiakov.

Organizácia materiálu a nadväznosť

Úlohy v materiáli sú stavané tak, aby viedli k objaveniu rôznych geometrických tvrdení či vlastností trojuholníka a jeho prvkov. Preto odporúčame, aby si žiaci tieto úlohy najprv vyriešili. Ideálne v malých skupinách alebo samostatne, prípadne v riadenej diskusii učiteľa so žiakmi. Materiál môže slúžiť aj na samoštúdium žiakov.

Pri úvodných úlohách sa Vám môže stať, že v nej žiak spozná niektoré známe tvrdenie, na ktoré sa úloha snaží naviesť. V takejto situácii odporúčame viesť žiaka k tomu, aby sa s takýmto riešením neuspokojil a vyriešil úlohu, bez využitia tvrdenia. Môžeme sa ho aj spýtať, či vie prečo uvažované tvrdenie platí.

Materiál je rozdelený do ôsmich častí, ktoré sú pomerne nezávislé a je možné používať ich aj zvlášť. Nadväznosti

1. **Počítanie uhlov.** Je odporúčané prejsť so žiakmi aspoň niektoré úlohy. Pokiaľ žiac nemajú skúsenosti
2. **Uhly v kružniciach.** Nadväzuje na Počítanie uhlov.
3. **Osi a kružnice v trojuholníku.** Niektoré úlohy so sady na precvičenie využívajú počítanie uhlov.
4. **Stredné priečky.**
5. **Ťažnice.** Nadväzuje na Stredné priečky
6. **Výšky.** Väčšina úloh vyžaduje uhly v kružniciach. Vhod príde aj skúsenosť s tetivovými štvoruholníkmi.
7. **Tetivové štvoruholníky.** Nadväzuje na Počítanie uhlov a Uhly v kružniciach.
8. **Úlohy kombinujúce rôzne poznatky.** Ako názov naznačuje, tieto úlohy môžu využívať znalosti zo všetkých častí.

Po objavení potrebnej teórie nasleduje sada úloh na jej precvičenie. Náročnejšie úlohy majú k dispozícii nápoved', ktorú nájdete v kapitole ?? . Veľa úloh je prebraných z matematických súťaží a majú riešenie dostupné na internete. Konkrétne riešenia úloh z Matematickej olympiády nájdete na stránke [3]. Pri týchto úlohách uvádzame zdroj vo formáte [MOr $k-i-u$], kde r je číslo ročníka, k je písmeno označujúce kategóriu, i označuje kolo – I pre domáce kolo, S pre školské kolo, II pre krajské kolo, III pre celoštátne kolo – a u označuje číslo úlohy. Druhým početným zdrojom úloh je archív Korešpondenčného matematického seminára [1]. Úlohy z tohto zdroja sú označené [KMS $r-ck-u$], kde r je ročník, c je časť – Z značí zimnú (prvú) časť a L značí letnú (druhú) časť – k značí poradové číslo kola (série) a u značí číslo úlohy.

1 Počítanie uhlov

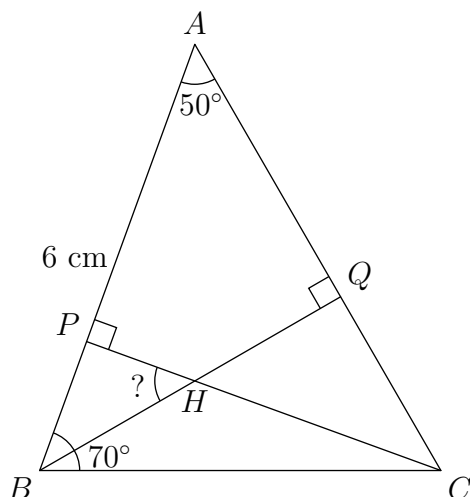
Počítanie uhlov je jednou zo základných metód riešenia geometrických úloh. Začneme tým, že si ho precvičíme na niekoľkých jednoduchých úlohách. Uvedieme aj prehľad tvrdení o uhloch, ktoré by ste mali poznať zo základnej školy. Ten môžete pokojne preskočiť a vrátiť sa k nemu, ak by ste mali ťažkosti s riešením niektorej úlohy.

Základné tvrdenia o uhloch

- (i) Súčet uhlov v trojuholníku je 180° .
- (ii) Súčet uhlov v štvoruholníku je 360° .
- (iii) Vrcholové uhly sú zhodné.
- (iv) Susedné uhly majú súčet 180° .
- (v) Pri rovnobežkách pretatých priečkou súhlasné a striedavé uhly sú zhodné.
- (vi) Rovnoramenný trojuholník má zhodné uhly pri základni.
- (vii) Trojuholník s dvomi zhodnými uhlami je rovnoramenný.
- (viii) Rovnostranný trojuholník má všetky uhly veľkosti 60° .

Úloha 1.1. Máme daný trojuholník ABC . Na strane AB leží bod P tak, aby bol uhol APC pravý. Podobne na strane AC leží bod Q tak, aby uhol AQB bol pravý. Úsečky PC a QB sa pretínajú v bode H . Vypočítajte veľkosť uhla PHB , ak $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 70^\circ$ a $c = 6$ cm.

Uvedieme dve riešenia. Prvé priamo teraz a druhé uvedieme po úlohe 1.2, ktorá na túto nadväzuje.



Riešenie 1

Z pravouhlého trojuholníka APC si dopočítame

$$|\angle ABQ| = 180^\circ - |\angle BQA| - |\angle BAQ| = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ.$$

Potom z pravouhlého trojuholníka PHB dostaneme

$$|\angle PHB| = 180^\circ - |\angle BPH| - |\angle HBP| = 180^\circ - 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ.$$

Ako na dôkazové úlohy

Doteraz sme sa stretli s výpočtovými úlohami. Teraz sa pozrieme na to, čo robiť v situácii, keď máme niečo dokázať. Skúste si najprv sami vyriešiť nasledovnú úlohu.

Úloha 1.2. Máme daný trojuholník ABC . Na strane AB leží bod P tak, aby bol uhol APC pravý. Podobne na strane AC leží bod Q tak, aby uhol AQB bol pravý. Úsečky PC a QB sa pretínajú v bode H . Dokážte, že uhly PHB a BAC majú rovnakú veľkosť.

Pozorný čitateľ si všimne, že v úlohe 1.1 sme uhol β a stranu c vôbec nevyužili. A aj to, že asi nebude náhoda, že veľkosť uhla PHB vyšla α . Úvahy z našich riešení vieme spraviť všeobecne s uhlom α a takto dostaneme dôkaz požadovaného tvrdenia. Pre lepšiu názornosť ho uvedieme vedľa prvého riešenia úlohy 1.1.

Riešenie úlohy 1.1

Súčet uhlov štvoruholníka $APHQ$ je 360° , preto

$$|\angle PHQ| = 360^\circ - 90^\circ - 50^\circ - 90^\circ = 130^\circ.$$

Uhly PHB a PHQ sú susedné, teda

$$\begin{aligned} |\angle PHB| &= 180^\circ - |\angle PHQ| = \\ &= 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ. \end{aligned}$$

Riešenie úlohy 1.2

Nech $|\angle BAC| = \alpha$.

Súčet uhlov štvoruholníka $APHQ$ je 360° , preto

$$|\angle PHQ| = 360^\circ - 90^\circ - \alpha - 90^\circ = 180^\circ - \alpha.$$

Uhly PHB a PHQ sú susedné, teda

$$\begin{aligned} |\angle PHB| &= 180^\circ - |\angle PHQ| = \\ &= 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha. \end{aligned}$$

V tejto situácii prakticky nie je rozdiel medzi dokazovaním a výpočtom. A tak tomu je aj pri viacerých ďalších dôkazových úlohách. Takéto dôkazové úlohy si vieme predstaviť tak, že miesto dokazovania máme vhodnú vec vypočítať. Teraz sme vedeli dokazovanie zhodnosti uhlov PHB a BAC transformovať na úlohu na výpočet veľkosti uhla PHB . Z tohto uhla pohľadu je dôkazová úloha jednoduchšia ako výpočtová – prezrádza nám totiž výsledok, ktorý máme dostať.

Ďalším znakom mnohých dôkazových úloh je ich všeobecnosť. Zriedkakedy stretneme dôkazovú úlohu, v ktorej máme zadaný trojuholník s konkrétnymi rozmermi. V tom spočíva náročnosť dokazovania – ukázať niečo pre nekonečne veľa (alebo veľmi veľa) prípadov.

Keď nám táto všeobecnosť robí problém, tak je dobré začať s konkrétnou verziou úlohy. Ak máme niečo dokazovať v trojuholníku, tak si najprv vezmeme konkrétny trojuholník a skúsme tvrdenie dokázať v ňom. Môžeme si ho skúsiť aj narysovať. Nemusíme si však nutne voliť rozmery trojuholníka. Môžeme si stanoviť aj veľkosť iného uhla alebo strany, ktoré sú v zadaní.

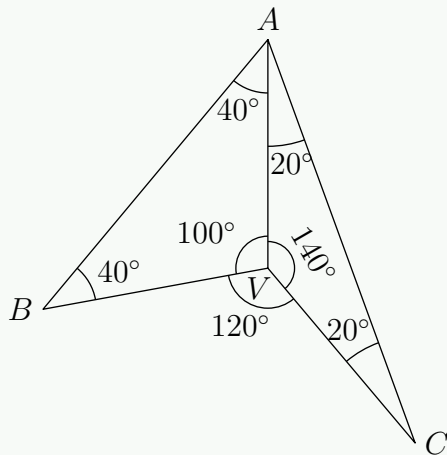
V mnohých prípadoch možno logické úvahy použité v konkrétnom riešení zovšeobecniť. K tomu nám často poslúžia premenné, ako sme to videli pri riešení úlohy 1.2, kde sme použili α ako veľkosť uhla BAC .

Úloha 1.3. Rovnoramenné trojuholníky ABV a ACV so základňami AB a AC zdieľajú rameno VA a žiadny iný bod. Vieme, že $|\angle BAV| = 40^\circ$ a $|\angle CAV| = 20^\circ$. Vypočítajte veľkosť konvexného uhla BVC .

Riešenie

V rovnoramennom trojuholníku ABV sú uhly pri základni rovnaké. Preto $|\angle VBA| = |\angle VAB| = 40^\circ$. Dovoľaním uhlov do 180° potom dostaneme $|\angle AVB| = 100^\circ$. Rovnako pre rovnoramenný trojuholník ACV dovoľujeme $|\angle VCA| = 20^\circ$ a $|\angle AVC| = 140^\circ$. Na záver vieme veľkosť hľadaného uhla BVC zistiť dovoľaním z plného uhla:

$$|\angle BVC| = 360^\circ - |\angle AVB| - |\angle AVC| = 360^\circ - 100^\circ - 140^\circ = 120^\circ.$$



Úloha 1.4. Rovnoramenné trojuholníky ABV a ACV so základňami AB a AC zdieľajú rameno VA a žiadny iný bod. Vieme, že $|\angle BAC| = 60^\circ$. Vypočítajte $|\angle BVC|$.

Riešenie

Úlohu možno riešiť rovnako ako predošlú, len použijeme premenné. Označme $|\angle BAV| = \alpha$ a $|\angle VAC| = \beta$, pričom $\alpha + \beta = 60^\circ$. Potom $|\angle AVB| = 180^\circ - 2\alpha$, $|\angle AVC| = 180^\circ - 2\beta$ a $|\angle BVC| = 360^\circ - (180^\circ - 2\alpha) - (180^\circ - 2\beta) = 2(\alpha + \beta) = 120^\circ$.

Úlohy na precvičenie

Úloha 1.5. V trojuholníku ABC pretína os vnútorného uhla pri vrchole A stranu BC v bode D . Vypočítajte veľkosť uhlov BDA a ADC , ak $a = 5$ cm, $\beta = 68^\circ$, $\gamma = 40^\circ$.

Úloha 1.6. V trojuholníku ABC sa osi všetkých jeho troch uhlov pretínajú v bode I . Vypočítajte veľkosti uhlov BIC , CIA a AIB , ak $a = 5$ cm, $\beta = 68^\circ$, $\gamma = 40^\circ$.

Úloha 1.7. Vyriešite predošlé úlohy pre všeobecný trojuholník. Teda vyjadrite výsledok v závislosti na stranách a veľkosti uhlov trojuholníka ABC .

Úloha 1.8. [2, s.14, ú.12] Trojuholníky ABC a CDE sú rovnoramenné postupne so základňami AC a CE . Ďalej platí, že úsečky AB a ED sú rovnobežné a bod C je vnútorným bodom úsečky BD . Dokážte, že uhol ACE je pravý.

Úloha 1.9. [2, s.15, ú. 20] Vnútri štvorca $ABCD$ sa nachádza bod E tak, že trojuholník ABE je rovnostranný. Nájdite veľkosť uhla CED .

Úloha 1.10 (MO71 C-S-2). Nech $ABCD$ je rovnobežník a L stred jeho strany CD , pričom BL je os uhla ABC . Dokážte, že priamky AL a BL sú navzájom kolmé.

Úloha 1.11 (KMS 07/08-L2-7). Nech $ABCD$ je rovnobežník a L stred jeho strany CD , Dokážte, že BL je os uhla ABC práve vtedy, keď priamky AL a BL sú navzájom kolmé.

Úloha 1.12. Vnútri štvorca $ABCD$ sa nachádza bod X tak, že $|DX| = |CX|$ a $|\angle CXD| = 150^\circ$. Dokážte, že trojuholník ABX je rovnostranný.

Úloha 1.13. V rovnoramennom trojuholníku ABC so základňou AB je na strane AC zvolený bod D tak, že platí $|BA| = |AD| = |DC|$. Určte vnútorné uhly trojuholníka ABC .

2 Uhly v kružniciach

Úloha 2.1. Máme daný trojuholník ABC , v ktorom je bod S stredom strany AB . Vieme, že platí $|AB| = 6$ cm, $|CS| = 3$ cm a $|\angle CAB| = 40^\circ$. Vypočítajte veľkosť uhla ACB .

Riešenie

Keďže S je stred strany AB , tak $|AS| = |SA| = 3$ cm $= |CS|$

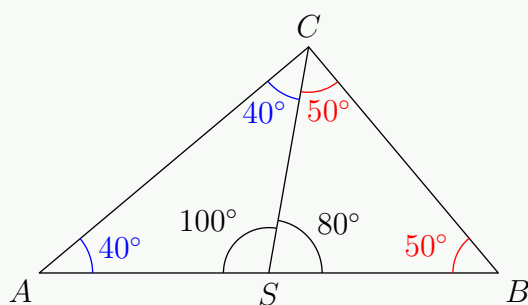
Trojuholník ASC je teda rovnoramenný, takže $|\angle ACS| = |\angle CAB| = 40^\circ$.

$|\angle ASC| = 180^\circ - |\angle SCA| - |\angle CAS| = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ$ (súčet uhlov v trojuholníku ASC).

$|\angle CSB| = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$ (susedný uhol).

$|\angle SCB| = |\angle SBC| = (180^\circ - 80^\circ)/2 = 50^\circ$ (z rovnoramenného trojuholníka SBC).

$|\angle ACB| = |\angle ACS| + |\angle SCB| = 40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$.



Porovnajcie riešenie predošlej úlohy s riešením nasledovnej úlohy.

Úloha 2.2. Máme danú úsečku AB dlhú 6 cm. V jej strede S zostrojíme kružnicu s polomerom 3 cm. Na kružnici k zvolíme bod C tak, aby $|\angle CAB| = 40^\circ$. Vypočítajte veľkosť uhla ACB .

Túto úlohu možno riešiť úplne identicky. Jediný rozdiel je v náčrte, ktorý si väčšina ľudí urobí – bude v ňom chýbať úsečka SC . To môže spôsobiť, že sa nám ťažko bude začínať. Táto situácia pekne ilustruje dôležitosť náčrtu a toho, čo si doňho zaznačíme. Pri niektorých úlohách nám môže pomôcť doplniť do náčrtu niečo, čo nie je priamo dané.

Úloha 2.3. Ako sa zmení riešenie predošlej úlohy, ak zmeníme veľkosť uhla CAB ?

Riešenie

Ukážeme, že uhol ACB je vždy pravý. Nech $\alpha = |\angle CAB|$. Keďže S je stred strany AB , tak $|AS| = |SA| = 3$ cm $= |CS|$

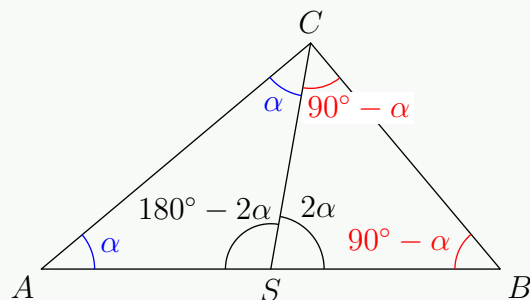
Trojuholník ASC je teda rovnoramenný, teda $|\angle ACS| = |\angle CAB| = \alpha$.

$|\angle ASC| = 180^\circ - |\angle SCA| - |\angle CAS| = 180^\circ - \alpha - \alpha = 180^\circ - 2\alpha$ (súčet uhlov v trojuholníku ASC).

$|\angle CSB| = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha$ (susedný uhol).

$|\angle SCB| = |\angle SBC| = (180^\circ - 2\alpha)/2 = 90^\circ - \alpha$ (z rovnoramenného trojuholníka SBC).

$|\angle ACB| = |\angle ACS| + |\angle SCB| = \alpha + (90^\circ - \alpha) = 90^\circ$.



Úloha 2.4. V predchádzajúcej úlohe si k danej úsečke AB so stredom S zvolíme bod C tak, aby uhol ACB bol pravý. Viete niečo povedať o tom, kde takýto bod C musí ležať? Čo nám hovorí o polohe bodu C riešenie predošlej úlohy (bez toho, aby sme ho nejako upravovali)?

Tu je dôležité si uvedomiť, že riešenie predošlej úlohy nám nič nehovorí o tom, kde tento bod môže byť. V nej sme ukázali len to, že pokiaľ zvolíme bod C na kružnici k so stredom S a polomerom $|SA| = 3$ cm, tak

Veta o Tálesovej kružnici

Uvažujme úsečku AB a kružnicu τ s priemerom AB . Pre bod C rôzny od bodov A, B platí, že $|\angle ACB| = 90^\circ$ práve vtedy, keď bod C leží na kružnici τ .

Dôkaz tejto vety sme už uviedli ako riešenie úlohy 2.3. Pre pestrosť však uvedieme ešte jeden, podobný dôkaz.

Dôkaz. Označme $|\angle ASC| = \alpha$ a $|\angle BSC| = \beta$. Keďže ide o susedné uhly, tak $\alpha + \beta = 180^\circ$. V rovnoramennom trojuholníku ACS dopočítame $|\angle ACS| = (180^\circ - \alpha)/2 = 90^\circ - \alpha/2$. Podobne v rovnoramennom trojuholníku BCS dopočítame $|\angle SCB| = 90^\circ - \beta/2$. Preto platí $|\angle ACB| = 90^\circ - \alpha/2 + 90^\circ - \beta/2 = 180^\circ - (\alpha + \beta)/2 = 180^\circ - 180^\circ/2 = 90^\circ$. $\square$

Teraz prejdeme k všeobecnejšej verzii vety o Tálesovej kružnici. K tomu ponúkneme dva prístupy navádzajúce na jej objavenie.

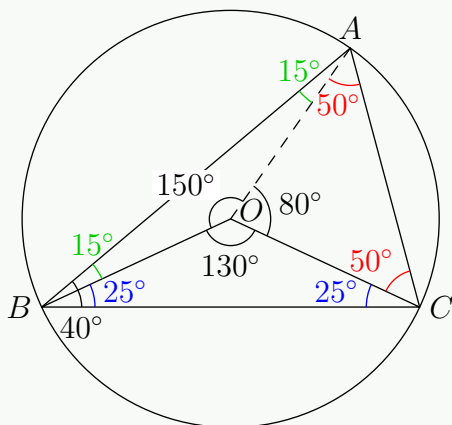
Úloha 2.5. Na kružnici k so stredom O sú dané body B a C také, že $|\angle BOC| = 130^\circ$.

Máme trojuholník ABC . Stred jeho opísanej kružnice označíme O . Vieme, že $|\angle BOC| = 130^\circ$ a $a = 5$ cm.

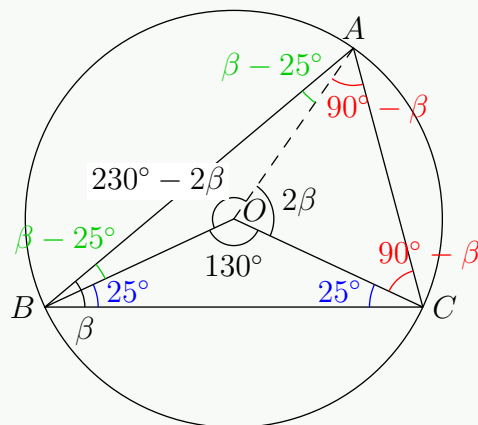
- Na dlhšom oblúku AB zvolíme bod A tak, aby $|\angle ABC| = 40^\circ$. Určte veľkosť uhla BAC .
- Kde máme zvoliť bod A , aby uhol BAC mal čo najväčšiu veľkosť?

Riešenie

a) Trojuholník BOC je rovnoramenný, lebo OB a OC sú polomery kružnice. Preto $|\angle OBC| = |\angle OCB| = (180^\circ - 130^\circ)/2 = 25^\circ$. Ďalej $|\angle OBA| = |\angle CBA| - |\angle OBC| = 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ$. Trojuholník OBA je tiež rovnoramenný, čiže $|\angle BAO| = 15^\circ$ a $|\angle BOA| = 180^\circ - 2 \cdot 15^\circ = 150^\circ$. Teraz vieme z plného uhla dopočítať $|\angle AOC| = 360^\circ - |\angle BOA| - |\angle BOC| = 360^\circ - 150^\circ - 130^\circ = 80^\circ$. Z rovnoramenného trojuholníka AOC dostaneme $|\angle OAC| = (180^\circ - 80^\circ)/2 = 50^\circ$. Na záver sčítame $|\angle BAC| = |\angle BAO| + |\angle OAC| = 15^\circ + 50^\circ = 65^\circ$.



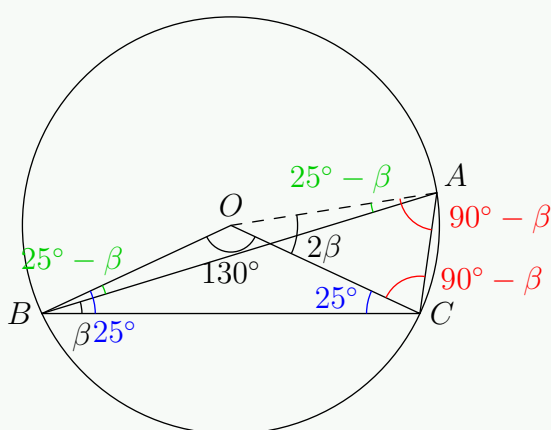
Obr. 1



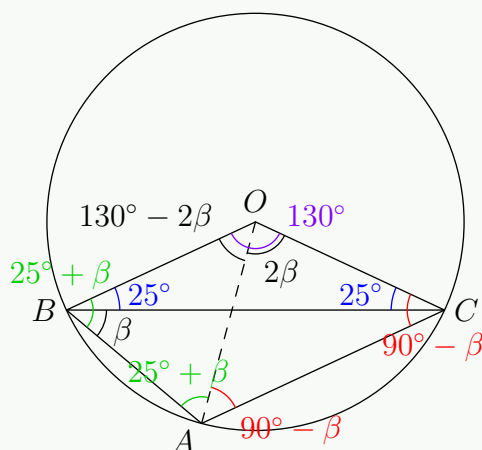
Obr. 2

b) Označme $|\angle ABC| = \beta$ a $|\angle BAC| = \alpha$. Vidíme, že keď poznáme uhol β , tak vieme ľahko určiť uhol α . Zopakujme teda postup z časti a), avšak teraz namiesto konkrétnej veľkosti uhla 40° budeme používať premennú β . Vyjde nám: $|\angle OBC| = |\angle OCB| = 25^\circ$. Ďalej $|\angle OBA| = \beta - 25^\circ = |\angle BAO|$, $|\angle BOA| = 180^\circ - 2 \cdot (\beta - 25^\circ) = 230^\circ - 2\beta$, $|\angle AOC| = 360^\circ - (230^\circ - 2\beta) - 130^\circ = 2\beta$, $|\angle OAC| = 90^\circ - \beta$ a $\alpha = \beta - 25^\circ + 90^\circ - \beta = 65^\circ$.

Vyzerá to tak, že vždy $\alpha = 65^\circ$, bez ohľadu na to, ako veľký uhol β si zvolíme. Avšak tento záver je unáhlený, to sme ešte nedokázali. Body môžu byť rozmiestnené aj inak. Ak $\beta < 25^\circ$, tak potom neplatí $|\angle OBA| = \beta - 25^\circ$, ale $|\angle OBA| = 25^\circ - \beta$. Podobne sa mení sčítavanie uhlov pri vrchole C. Ide však len o drobné odlišnosti v počítaní uhlov, ktoré sú znázornené na obrázku 3.



Obr. 3



Obr. 4

Avšak čo ak sa A nachádza v opačnej polrovine určenej priamkou BC ako je bod O? Potom $|\angle OBA| = \beta + 25^\circ = |\angle BAO|$, $|\angle BOA| = 180^\circ - 2 \cdot (\beta + 25^\circ) = 130^\circ - 2\beta$, $|\angle AOC| = 130^\circ - (130^\circ - 2\beta) = 2\beta$, $|\angle OAC| = 90^\circ - \beta$ a $\alpha = \beta + 25^\circ + 90^\circ - \beta = 115^\circ$ (pozri obrázok 4).

Teda najväčšia možná veľkosť uhla α je 115° .

Na tejto úlohe si môžeme všimnúť nasledovnú vec. Keď hýbeme s bodom A po dlhšom oblúku BC, tak uhol BAC má stále veľkosť 65° . Rovnako sa jeho veľkosť nemení ani na kratšom oblúku BC, kedy má veľkosť 115° .

Majme kružnicu k so stredom S a oblúk o kružnice k s krajnými bodmi A, B . Uhol ASB , v ktorom sa nachádza oblúk o , nazývame *stredovým uhlom* prislúchajúcim k oblúku o . Upozorňujeme, že oblúky s krajnými bodmi A, B existujú dva. Preto spresňujeme, že oblúk leží v uhle. Presnejšie oblúk o je prienik kružnice a stredového uhla. Ak je oblúk o dlhší ako polovica kružnice, tak jeho stredový uhol je nekonvexný, teda väčší ako 180° . Iný spôsob, ako bližšie špecifikovať, o ktorý z dvoch oblúkov AB ide, je použiť jeho vnútorný bod C – vtedy hovoríme o oblúku ACB .

Uhol ACB , kde C je bod kružnice nepatriaci oblúku o , sa nazýva *obvodovým uhlom* prislúchajúcim oblúku o (resp. nad oblúkom o).

V úlohe 2.5 sme mali stredový uhol BOC s veľkosťou 130° . Ten prislúchal ku kratšiemu oblúku BC opísanej kružnice, označme tento oblúk o_1 . Obvodový uhol je skúmaný uhol BAC , ktorý má vrchol A na dlhšom oblúku BC , ten označme o_2 . Ukázali sme, že tento obvodový uhol má vždy veľkosť 65° , čo je polovica zo 130° . Keď je bod A na oblúku o_1 , tak uhol BAC je obvodový uhol prislúchajúci oblúku o_2 a má veľkosť 115° . Stredový uhol oblúku o_2 je $360^\circ - 130^\circ = 230^\circ$, čo je znova dvojnásobok obvodového uhla veľkosti 115° . Tento vzťah platí aj všeobecne.

O obvodovom a stredovom uhle

Nech o je oblúk kružnice k . Potom stredový uhol prislúchajúci oblúku o má dvojnásobnú veľkosť ako ľubovoľný obvodový uhol prislúchajúci oblúku o .

Toto tvrdenie nám hovorí, že obvodové uhly prislúchajúce rovnakému oblúku sú zhodné.

Veta o obvodových uhloch

Nech o je oblúk kružnice k s krajnými bodmi A, B . Potom pre ľubovoľné dva vnútorné body C_1, C_2 oblúku o platí

$$|\angle AC_1 B| = |\angle AC_2 B|.$$

Tieto vety vieme využiť aj obrátene – na základe nich vieme zisťovať, kedy bod leží na kružnici. Skôr než si prečítate znenie nasledovnej vety, skúste sa nad tým zamyslieť a aj si ju odôvodniť.

Kedy bod leží na (opísanej) kružnici?

Nech k je kružnica opísaná trojuholníku ABC a bod X je ľubovoľný bod neležiaci na priamke AB . Potom bod X leží na kružnici k práve vtedy, keď spĺňa jednu z nasledovných podmienok:

- (i) bod X leží v polrovine ABC a platí $|\angle AXB| = |\angle ACB|$;
- (ii) bod X leží v polrovine opačnej k ABC a platí $|\angle AXB| = 180^\circ - |\angle ACB|$.

Dôkaz. Dôkaz implikácie „ $\Rightarrow$ “ vyplýva z vety 2. Ostáva nám teda dokázať, že každý bod spĺňajúci (i) alebo (ii) leží na kružnici k .

Nech platí (i), teda $|\angle AXB| = |\angle ACB|$. Nech je bod Y priesečníkom priamky BX s kružnicou. □

Úloha 2.6. V trojuholníku ABC platí $\alpha = 70^\circ$ a $\beta = 30^\circ$. Bodmi B a C vedieme dotýčnice ku kružnici opísanej trojuholníku ABC , ktoré sa pretnú v bode D . Určte vnútorné uhly trojuholníka BCD .

Riešenie

Dotýčnica ku kružnici je kolmá na polomer. Preto si do obrázku dokreslíme stred O kružnice opísanej trojuholníku ABC a spojíme ho s bodmi B a C . Pre stredový uhol oblúka BAC platí $|\angle BOC| = 2|\angle BAC| = 140^\circ$. V rovnoramennom trojuholníku BOC dopočítame $|\angle OBC| = |\angle OCB| = (180^\circ - 140^\circ)/2 = 20^\circ$. Potom $|\angle CBD| = 90^\circ - |\angle OBC| = 70^\circ$ a rovnako aj $|\angle BCD| = 70^\circ$. Potom už len v trojuholníku BCD dopočítame $|\angle BDC| = 180^\circ - 70^\circ - 70^\circ = 40^\circ$.

Všimnime si, že pri riešení sme nevyužili uhol β . Vypočítané veľkosti uhlov CBD a BCD závisia len od uhla α , presnejšie sú mu rovné. Týmto sme odhalili ďalší dôležitý vzťah medzi uhlami v kružnici. Nech ACB je oblúk kružnice k a nech sa bod X nachádza na dotýčnici ku kružnici k v bode A a zároveň v polrovine opačnej k ABC . Potom uhol BAX sa volá *úsekový uhol* prislúchajúci oblúku ACB a je rovný obvodovému uhlu prislúchajúcemu kratšiemu oblúku AB kružnice k . Aj pri tomto tvrdení platí opačná implikácia. To nám umožní na základe zhodnosti uhlov dokázať, že priamka sa dotýka kružnice.

Veta o úsekovom uhle

Nech AB je tetiva kružnice k a C, D sú body nachádzajúce sa v opačných polrovinách určených priamkou AB . Priamka AC sa dotýka kružnice k práve vtedy, keď $|\angle BAC| = |\angle BDA|$.

Dôkaz. Pokiaľ je AB priemer kružnice, tak tvrdenie vraví, že p je dotyčnicou práve vtedy, keď je kolmá na priemer, čo platí. Vo zvyšku dôkazu predpokladáme, že stred O kružnice k neleží na priamke AB a že oblúk ADB je kratší z oblúkov AB .

Nech $|\angle BDA| = \alpha$. Potom stredový uhol AOB má veľkosť 2α . Z rovnoramenného trojuholníka AOB máme $|\angle OAB| = 90^\circ - \alpha$. Priamka AC je dotyčnicou ku kružnici k práve vtedy, keď $|\angle OAC| = 90^\circ$, čo je ekvivalentné tomu, že $|\angle BAC| = 90^\circ - |\angle OAC| = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha = |\angle BDA|$. $\square$

3 Osi a kružnice v trojuholníku

V tejto časti sa bližšie pozrieme na to, čo sú to osi strán a uhlov. Obe by ste mali poznať zo základnej školy, no v poznaní ich vlastností však viacerí žiaci majú medzery. Keďže osi majú významný súvis s rysovaním, tak túto časť uvádzame konštrukčnými úlohami. Nevyžadujeme, aby ste ich riešili rigorózne s členením na všetky potrebné časti. Stačí, keď sa zamyslíte nad tým, prečo sú vaše postupy správne.

Úloha 3.1. Traja kamaráti Albert, Betka a Cecília bývajú v bodoch A, B, C tak, že $|AB| = 6$ km, $|BC| = 7$ km a $|CA| = 5$ km. V bode X si chcú postaviť víkendovú chatu. Cecília ju chce mať 3 km od svojho domu. Albertovi a Betke na tom až tak nezáleží. Dôležité je, aby ju mali obaja rovnako ďaleko. Kde všade možno postaviť chatu? Zostrojte všetky takéto body X .

C

A

B

Riešenie

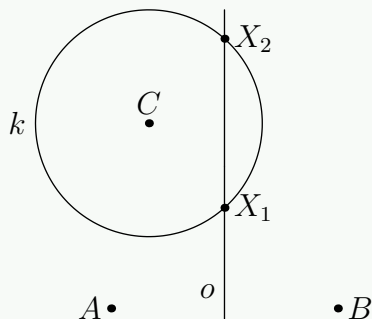
Postupne spracujme podmienky zo zadania. Hľadaný bod X má byť vzdialený 3 km od bodu C . To znamená, že musí ležať na kružnici k so stredom v bode C a polomerom 3 km. Druhá podmienka vraví, že bod X je rovnako vzdialený od bodu A ako od bodu B , teda $|XA| = |XB|$. Vieme narysovať nejaký útvar, ktorý bude obsahovať všetky body s takouto vlastnosťou?

Pokiaľ nie, tak ukážeme, ako takýto útvar vieme objaviť. Začnime tým, že skúsme narysovať niekoľko bodov spĺňajúcich tieto vlastnosti. Niektorí to zvládnu hneď. Ak máme ťažkosti, tak skúsme postupne. Vieme narysovať taký bod X spĺňajúci $|XA| = |XB| = 6$ km? Také body X nájdeme na priesečníkoch dvoch kružníc so stredmi v bodoch A, B a polomerom 6 km. Takto vieme pokračovať s ďalšími bodmi pre iné vzdialenosti. Dostaneme tak niekoľko bodov X , ktoré sú rovnako vzdialené od bodov A, B . Vieme

si domyslieť, ako budú vyzeráť všetky?

Môžeme si všimnúť, že body X s touto vlastnosťou ležia na priamke, nazvime ju o . Vyzerá to, že priamka o je kolmá na stranu AB a prechádza jej stredom. Takúto priamku by sme mali poznať – je to os úsečky AB . A možno si aj pamätáme, že os úsečky má práve túto vlastnosť – obsahuje tie a len tie body, ktoré sú rovnako vzdialené od bodov A, B .

Hľadaný bod X tak nájdeme v prieniku kružnice k a priamky o . Tie sa pretnú v dvoch bodoch, takže úloha má dve riešenia.



Na tejto úlohe sme si pripomenuli, čo je to os úsečky. Dokonca ju môžeme vyjadriť dvomi spôsobmi:

- (i) priamka, ktorá prechádza stredom úsečky AB a je na ňu kolmá;
- (ii) množina všetkých bodov roviny, ktoré sú rovnako vzdialené od bodov A, B .

Prvý spôsob nám vraví, ako os úsečky vyzerá, resp. ako ju narysovať. Druhý nám opisuje vlastnosť ich bodov. Všimnite si, že z neho nie je vôbec na prvý pohľad jasné, že os úsečky je priamka. Taktiež z pohľadu riadneho dokazovania nie je jasné, že tieto dva spôsoby opisujú to isté.

Pre potreby tohto materiálu sa stačí uspokojiť s tým, že sa o tom presvedčíme skúšaním. Označme si priamku z bodu (i) ako o a množinu z bodu (ii) ako M . Skúste si zvoliť niekoľko bodov na priamke o a overte (napr. meraním), že majú rovnakú vzdialenosť od A a B , teda že patria do M . Nezabudnite to spraviť aj opačne – zvoľte si niekoľko bodov mimo o a ukážte, že ich vzdialenosti od A a B *nie* sú rovnaké.

Pre záujemcov uvedieme dôkaz, že $o = M$. Označme si pritom stred úsečky AB ako S . Ide o rovnosť dvoch množín. To znamená, že potrebujeme dokázať dve veci:

- Každý bod z priamky o sa nachádza v množine M : Pre každý bod $X \in o$ platí $|AS| = |BS|$, $|SX| = |SX|$ a $\angle ASX = \angle BSX = 90^\circ$. Preto sú trojuholníky ASX a BSX zhodné podľa vety *sus*, teda $|AX| = |BX|$, čiže $X \in M$.
- Každý bod množiny M leží na priamke o : Pre každý bod X z množiny M platí $|AX| = |BX|$. Ďalej platí $|AS| = |BS|$ a $|SX| = |SX|$. Preto sú trojuholníky ASX a BSX zhodné podľa vety *sss*. Teda $\angle ASX = \angle BSX$ a keďže ide o zhodné susedné uhly, tak musia byť pravé. Preto $SX \perp AB$, čiže $X \in o$.

Dávame do pozornosti, že hoci obe časti dôkazu vyzerajú podobne, idú logicky iným smerom – majú rozdielne predpoklady, z ktorých vychádzajú, aj závery. To môžeme vidieť na tom, že sme použili rôzne vety o zhodnosti trojuholníkov.

Úloha 3.2. Možno chatu z predošlej úlohy postaviť spravodlivo, teda aby každý k nej mal rovnako ďaleko?

Riešenie

Hľadáme bod X , pre ktorý bude platiť $|AX| = |BX| = |CX|$. Opäť si rozdelíme úlohu na viac krokov. Aby sme splnili podmienku $|AX| = |BX|$, tak bod X sa musí nachádzať na osi o_c úsečky AB . Keďže $|BX| = |CX|$, tak X musí ležať na osi o_a úsečky BC . Preto $X \in o_c \cap o_a$. Z vlastností osí úsečiek platí $|AX| = |BX| = |CX|$.

Takýto bod X je vlastne *stred kružnice opísanej trojuholníku ABC* – je totižto rovnako vzdialený od všetkých vrcholov trojuholníka. Preto môžeme spraviť kružnicu so stredom v bode X a polomerom $|XA|$ a tá obsiahne aj body B a C . Riešenie predošlej úlohy zachytilo podstatu toho, že osi strán trojuholníka sa pretínajú v jednom bode. Skúste zostaviť tento dôkaz.

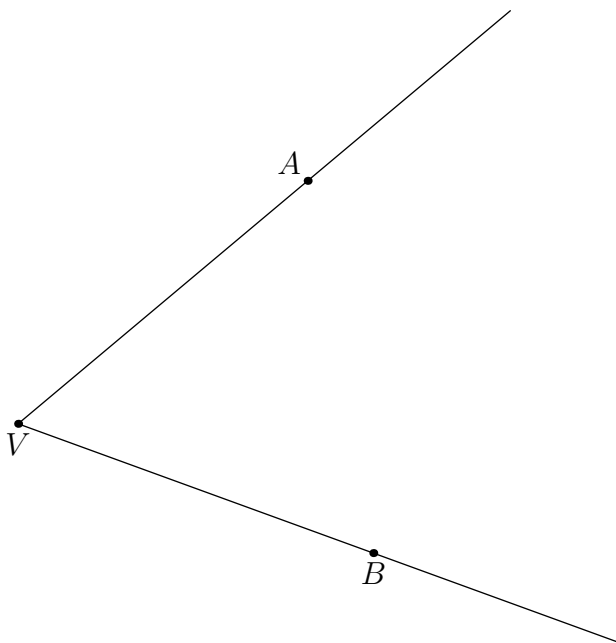
Veta

Osi strán trojuholníka ABC sa pretínajú v jednom bode.

Dôkaz. Nech X je priesečník osí o_c a o_a postupne strán AB a BC . Keďže $X \in o_c$, tak $|XA| = |XB|$, a keďže $X \in o_a$, tak $|XB| = |XC|$. Keďže $|XA| = |XB|$ a $|XB| = |XC|$, tak aj $|XA| = |XC|$. To znamená, že bod X leží aj na osi o_b strany AC . $\square$

Tu si môžeme všimnúť štandardný dôkaz toho, že tri priamky sa prechádzajú jedným bodom. Označíme si priesečník dvoch z nich a ukážeme, že ním prechádza aj tretia priamka. Osi strán sú vďaka vlastnosti ich bodov pomerne vďačné na tento dôkaz.

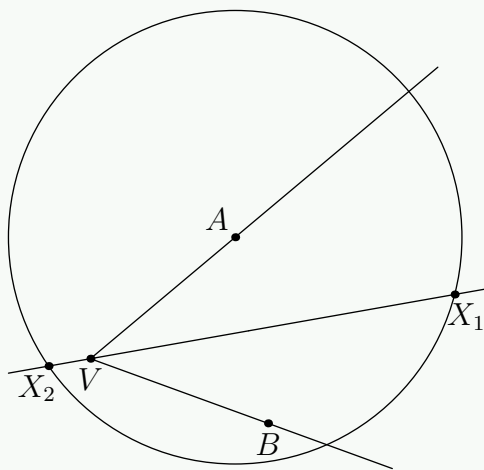
Úloha 3.3. Z bodu V vychádzajú dve diaľnice – polpriamky VA a VB , ktoré zvierajú uhol 60° . Body A , B sa nachádzajú 5 km od bodu V . Pán Tajomný vám prezradil, že býva v bode T vzdialenom 6 km od bodu A tak, že jeho vzdialenosť k obom diaľnicám je rovnaká. Kde všade môže bývať pán Tajomný? Zostrojte všetky takéto body T .



Úlohu možno riešiť podobne ako úlohu 3.1. Odporúčame, aby ste si ju vyriešili najprv sami. Potom skontrolujte, či je nasledovné riešenie správne.

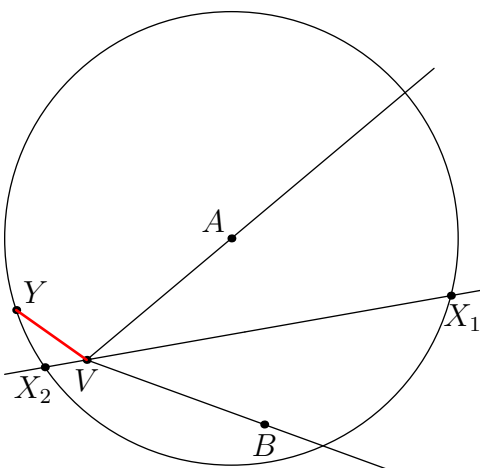
Pokus o riešenie

Keďže je bod T vzdialený 6 km od bodu A , tak musí ležať na kružnici k so stredom v bode A a polomerom 6 km. Ďalej bod T má byť rovnako vzdialený od polpriamok VA a VB . To znamená, že musí ležať na priamke o , ktorá je osou uhla AVB . Teda bod T leží na prieniku $k \cap o$, čo nám dá dve možné polohy bodu O .



Oproti minulému riešeniu sme v ňom vynechali objavenie vlastnosti osi uhla. Je to vôbec správne, že bod T musí ležať na osi uhla AVB ? Zamysleli ste sa nad tým?

Táto úloha skrýva chyták. Pozrite sa na bod Y , či vyhovuje zadaniu.



Bod Y je vzdialený 6 km od bodu A . Môžeme to odmerať aj pravítkom, ale vyplýva to aj z toho, že leží na kružnici k . Keď sa chceme z bodu Y dostať na diaľnicu (polpriamku) VA , koľko musíme prejsť? A ako je to pre diaľnicu VB ? Tu nás môže zneistiť, čo je to vzdialenosť bodu od priamky. Práve preto sme teraz napísali vzdialenosť od diaľnice. Keď sa chceme dostať na diaľnicu VA , tak zrejme pôjdeme po vyznačenej červenej úsečke YV . Je to najkratšia cesta, ako sa k diaľnici dostať. Takto sa meria vzdialenosť bodu X od ľubovoľnej množiny bodov M – je to dĺžka najkratšej úsečky XY , kde $Y \in M$. Vzdialenosť bodu Y od oboch polpriamok VA , VB je tak $|YV|$, teda je od oboch rovnako vzdialený.

Opis vlastnosti osi uhla je náročný na podobné nachytenie sa. Nekorektné definície sa objavujú aj v niektorých učebniciach. Množina bodov rovnako vzdialených od polpriamok VA a VB okrem priamky o obsahuje body z prieniku polrovín VCA a VDB , kde $|\angle CVA| = |\angle DVB| = 90^\circ$ (na obrázku ?? vyznačená červenou). Zelenou farbou sú potom vyznačené všetky body X vyhovujúce úlohy 3.3.

Jedna zo správnych ekvivalentných definícií osi uhla je nasledovná:

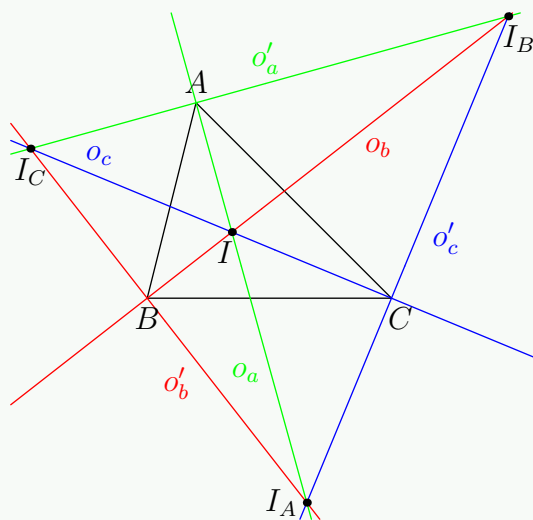
- (i) Os uhla AVB je polpriamka VX , kde bod X sa nachádza vnútri uhla AVB tak, že $|\angle AVX| = |\angle XVB|$.
- (ii) Os uhla je množina bodov uhla AVB , ktoré sú rovnako vzdialené od jeho ramien (teda od polpriamok VA , VB).

Jediný rozdiel je, že hovoríme o množine bodov *uhla* AVB , teda nie o množine všetkých bodov roviny. Body mimo uhol tak do tejto množiny nezahŕňame.

Úloha 3.4. V Kocúrkove sú tri diaľnice tvorené priamkami AB , BC a CA , ktorých priesečníky A , B , C sú navzájom rôzne body. Opíšte postup konštrukcie, ako nájsť všetky body P , v ktorých možno postaviť budovu diaľničnej polície tak, aby bola rovnako vzdialená od všetkých troch diaľnic.

Riešenie

Opäť začneme tým, že sa pozrieme na podmienku, že hľadaný bod P je rovnako vzdialený od priamok AB a AC . Takýto bod nemôže ležať iba na jednej z týchto priamok. Priamky AB a AC delia rovinu na štyri uhly. Keď leží v jednom z týchto uhlov, tak rovnakú vzdialenosť má práve vtedy, keď leží na osi uvažovaného uhla. Dostaneme tak, že bod P musí ležať na zjednotení osí všetkých štyroch uhlov určených priamkami AB a AC . Ide o zjednotenie priamok o_α a o'_α , kde o_α obsahuje os vnútorného uhla α trojuholníka ABC a o'_α je zjednotenie osí dvoch vonkajších uhlov pri vrchole A trojuholníka ABC .



Analogicky, keďže bod P je rovnako vzdialený od priamok BA a BC , tak musí ležať na zjednotení osí uhlov o_β a o_γ pri vrchole B . Teda $P \in (o_\alpha \cup o'_\alpha) \cap (o_\beta \cup o'_\beta)$. Takto dostaneme štyri priesečníky $P_0 \in o_\alpha \cap o_\beta$, $P_1 \in o_\alpha \cap o'_\beta$, $P_2 \in o'_\alpha \cap o_\beta$ a $P_3 = o'_\alpha \cap o'_\beta$. Pre každý z nich platí, že je rovnako vzdialený od priamok AB , AC a táto vzdialenosť je rovná aj vzdialenosti od priamky BC . Teda každý z týchto štyroch bodov spĺňa podmienku zo zadania. Úloha má tak 4 riešenia.

Zo záveru úlohy vyplýva, že každý zo štyroch zostrojených bodov leží aj na zjednotení osí $o_\gamma \cup o'_\gamma$. Presnejšie $P_0, P_3 \in o_\gamma$ a $P_1, P_2 \in o'_\gamma$. Tým sme ukázali hlavnú myšlienku dôkazu nasledovných viet.

Veta

Osi vnútorných uhlov trojuholníka sa pretínajú v jednom bode.

Veta

Osi vonkajších uhlov pri dvoch vrcholoch trojuholníka a os vnútorného uhla pri treťom vrchole trojuholníka sa pretínajú v jednom bode.

Spoločný priesečník osí vnútorných uhlov je stredom *kružnice vpísanej trojuholníku ABC* , teda takej kružnice, ktorá sa dotýka všetkých troch *strán* trojuholníka. Jej stred zvyčajne značíme I . Spôsob nájdania jej stredy je podobný ako v riešení úlohy 3.4. Akurát vďaka podmienke na dotyk so stranami a nie priamkami sa nám stačí obmedziť na vnútorné body trojuholníka ABC , čo vedie na uvažovanie iba osí vnútorných uhlov trojuholníka ABC .

Je však dobré si uvedomiť, že všeobecnejšie zadaná konštrukčná úloha 3.4 má až 4 riešenia. Kde hľadáme kružnicu dotýkajúcu sa troch priamok obsahujúcich strany trojuholníka ABC . Bod P_1 , teda spoločný bod osí o_α , o'_β , o'_γ je *stred kružnice pripísanej k strane BC trojuholníka ABC* , čo je kružnica dotýkajúca sa strany BC a polpriamok opačným k AC a AB . Jej stred zvykneme označovať I_A . Analogicky sa definujú kružnice pripísané k stranám CA a AB , ktoré postupne označujeme I_B a I_C . Pripomenieme, že polpriamku opačnú

k polpriamke AB označujeme $\overrightarrow{AB}^+$.

Ako si zapamätať konštrukciu vpísanej a opísanej kružnice

V praxi sme sa viackrát stretli s tým, že žiak si nepamätal, ako sa konštruje stred kružnice vpísanej alebo opísanej trojuholníku. Pre každý z nich sme sa stretli s tvrdeniami, že ho nájdeme na priesečníku osí strán, osí uhlov, výšok, aj ťažníc. Najčastejšie sme sa stretli so zámenou osí uhlov a strán. Preto zhrnieme niekoľko rád, ako takýmto chybám predísť.

Prvou je nespoľiehať sa na našu pamäť, ale rozmýšľať a odvodiť si to. To sme sa snažili ilustrovať pri úlohách 3.1 a 3.3. Povieme si, akú vlastnosť má mať hľadaný stred a zameriame sa najprv na jednu z požadovaných rovností. Pritom nám môže pomôcť:

- Množina bodov rovnako vzdialených od bodov A , B je os úsečky AB , keďže máme zadané len dva body. Len pomocou nich uhol nedostaneme.
- Množina bodov rovnako vzdialených od polpriamok VA , VB (resp. priamok, úsečiek) je os uhla (resp. viacero osí podľa presného zadania). Tu zas nemáme zadanú úsečku, takže nemá zmysel ju robiť. Uvažovať úsečku VA alebo VB by sme síce vedeli, ale je to celkom umelé. Najmä keďže zadaná množina bodov sa nemení, pokiaľ od A posunieme po polpriamke VA .

Ďalšou pomôckou vie byť načrtnúť si tupouhlý trojuholník. V ňom sa osi strán pretnú mimo trojuholníka a osi vnútorných uhlov vnútri trojuholníka. A stred kružnice vpísanej musí byť vnútri trojuholníku.

Úlohy na precvičenie

Úloha 3.5. Dokážte, že os vnútorného a vonkajšieho uhla toho istého vrchola trojuholníka sú na seba kolmé.

Úloha 3.6. Riadne sformulujte dôkaz vety 3.

Úloha 3.7. Riadne sformulujte dôkaz vety 3.

Úloha 3.8 (MO75 C-I-5). Nech sa uhlopriečky lichobežníka $ABCD$ pretínajú v bode P a ich osi sa pretínajú v bode M ležiacom na jeho základni AB . Dokážte, že bod P je stred kružnice vpísanej do trojuholníka CDM .

Úloha 3.9 (MO63 C-S-3). Nech ABC je trojuholník taký, že uhol BCA je pravý. Nech I je stred kružnice vpísanej do ABC a X a Y priesečníky prepony AB a rovnobežiek so stranami CA , resp. CB cez bod I . Dokážte, že $|AX|^2 + |BY|^2 = |XY|^2$.

Úloha 3.10 (MO72 B-S-2). Nech $ABCD$ je štvorec, E bod polpriamky opačnej k polpriamke CB taký, že $|BC| = |CE|$, F stred strany BC a G kolmý priemet bodu E na priamku AF . Dokážte, že bod C je stred kružnice vpísanej do trojuholníka AGE .

Úloha 3.11 (MO61 C-S-2). Nech ABC je rovnoramenný trojuholník so základňou AB a S jej stred. Nech sa kružnice vpísané do trojuholníkov ACS a BCS dotýkajú priamky AB v bodoch, ktoré delia základňu AB na tri zhodné diely. Vypočítajte $|AB| : |CS|$.

Úloha 3.12 (MO61 C-I-2). Nájdite prirodzené čísla, ktoré sú dĺžkami strán trojuholníka s obvodom 72 takého, že jeho najdlhšia strana je rozdelená bodom dotyku vpísanej kružnice v pomere 3 : 4.

Užitočné cvičenia o vpísanej a pripísanej kružnici

Nasledujúce úlohy obsahujú niekoľko užitočných tvrdení, ktoré súvisia s vpísanou a pripísanou kružnicou. Ich znalosť môže byť užitočná v náročnejších úlohách matematických súťaží.

Úloha 3.13. Nech r je polomer kružnice vpísanej trojuholníku ABC a s je polovica jeho obvodu. Dokážte, že pre jeho obsah platí $S = sr$.

Úloha 3.14. Nech K, L, M sú postupne body dotyku kružnice vpísanej trojuholníku ABC so stranami BC, CA, AB . Dokážte, že priamky AI a LM sú na seba kolmé.

Úloha 3.15. Nech K, L, M sú postupne body dotyku kružnice vpísanej trojuholníku ABC so stranami BC, CA, AB . Určte dĺžky úsečiek BK, KC, CL, LA, AM, MB .

Úloha 3.16. Nech K, L, M sú postupne body dotyku kružnice pripísanej k strane BC trojuholníka ABC s priamkami BC, CA, AB . Určte dĺžky úsečiek BK, KC, CL, LA, AM, MB .

Úloha 3.17. Nech DE je priemer kružnice vpísanej trojuholníku ABC , pričom bod D je jej bod dotyku so stranou BC , a nech F bod dotyku kružnice pripísanej k strane BC so stranou BC . Dokážte, že

- a) body A, E, F ležia na priamke;
- b) $|BD| = |FC|$.

4 Stredné priečky

Úloha 4.1. Máme trojuholník ABC so stranami dĺžok $a = 8, b = 9, c = 6$. Určte dĺžku úsečky XY , kde bod X leží na strane AB a bod Y leží na strane AC tak, že

- a) X a Y sú stredy strán;
- b) $|AX| : |XB| = |AY| : |YC| = 1 : 2$;
- c) $|AX| : |XB| = |AY| : |YC| = 1 : 3$;
- d) $|AX| : |XB| = |AY| : |YC| = 5 : 2$.

Vo všetkých podúlohách zistíte veľkosť uhla XYA .

Úloha 4.2. V trojuholníku ABC označme S_c stred strany c . Dokážte, že rovnobežka so stranou a vedená bodom S_c pretína stranu b v jej strede.

Tu sme sa stretli s významnou úsečkou trojuholníka, ktorá spája stredy dvoch jeho strán. Nazýva sa *stredná priečka*. Keďže sa budeme zaoberať stredmi strán, tak, ak nepoviemme inak, budeme stredy strán a, b, c postupne označovať S_a, S_b, S_c .

Vlastnosti stredných priečok

Pre každú strednú priečku trojuholníka platí:

- (i) je rovnobežná s treťou stranou (teda tou, ktorej stred nie je krajným bodom strednej priečky, napr. $S_b S_c \parallel BC$) a
- (ii) má polovičnú dĺžku ako táto strana (teda napr. $|S_b S_c| = \frac{1}{2}|BC|$).

Taktiež tri stredné priečky delia trojuholník na štyri menšie zhodné trojuholníky.

Úlohy na precvičenie

Úloha 4.3. V štvoruholníku $ABCD$ označíme S, T, U, V postupne stredy strán AB, BC, CD, DA . Dokážte, že štvoruholník $STUV$ je rovnobežník.

Úloha 4.4. V štvoruholníku $ABCD$ označíme S, T, U, V postupne stredy strán AB, BC, CD, DA . Dokážte, že úsečka SU rozpoľuje úsečku VT .

5 Ťažnice

Aby nás neplietli znalosti, ktoré sme mohli o ťažniciach počuť v škole, tak začneme najprv s úlohami, v ktorých budeme pracovať s inými úsečkami. Spôsob riešenia týchto úloh nám však pomôže hlbšie pochopiť vlastnosti ťažníc.

Úloha 5.1. Máme daný trojuholník ABC so stranami $a = 5,1$ cm, $b = 6,9$ cm a $c = 7,8$ cm. Na strane CA zvolíme bod X tak, aby platilo $|XA| = 2|XC|$. Podobne na strane CB zvolíme bod Y tak, aby platilo $|YB| = 2|YC|$. Priesečník úsečiek XB a YA označíme P . Ďalej vieme, že platí $|XB| = 5,2$ cm a $|YA| = 6,8$ cm. Určte dĺžky úsečiek

a) XY ,

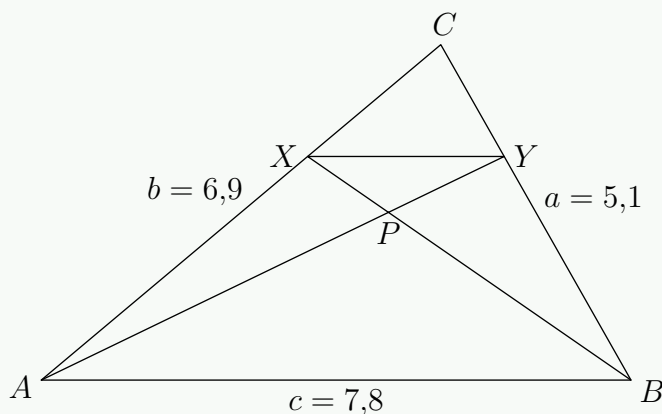
b) XP ,

c) BP .

Riešenie

Pre trojuholníky ABC a XYC platí $|CA| : |CX| = |CB| : |CY| = 3$ a $|\angle ACB| = |\angle XCY|$, lebo ide o totožné uhly. Preto sú trojuholníky ABC a XYC podobné podľa vety *sus*. Z toho dostávame, že

$$\frac{|AB|}{|XY|} = 3, \quad \text{teda} \quad |XY| = \frac{1}{3}|AB| = 2,6 \text{ cm.}$$



Rovnako z tejto podobnosti musí platiť $|\angle CAB| = |\angle CXY|$, teda priamky AB a XY sú rovnobežné. Z toho dostávame rovnosti striedavých uhlov $|\angle YXP| = |\angle PBA|$ a $|\angle XYP| = |\angle PAB|$. Preto aj trojuholníky XYP a ABP sú podobné podľa vety *uu*. Koeficient ich podobnosti je $|AB| : |XY| = 3 : 1$. Preto aj $|BP| : |PX| = 3 : 1$. Bod P teda rozdeľuje úsečku BX v pomere $3 : 1$. Preto

$$|XP| = \frac{1}{4}|XB| = 1,3 \text{ cm} \quad \text{a} \quad |BP| = |BX| - |XP| = 3,9 \text{ cm.}$$

Úloha 5.2. V konfigurácii z predošlej úlohy poznáme len dĺžky $c = 6$ cm, $|XB| = 8$ cm a $|YA| = 5$ cm. Viete vypočítať dĺžky úsečiek XY , XP a AP v tejto situácii?

Riešenie

Stačí si uvedomiť, že dĺžky strán a , b sme pri riešení vôbec nevyužili. Preto úlohu vieme riešiť rovnakým postupom.

Úloha 5.3. Úlohu 5.1 vieme jednoducho vyriešiť približne rysovaním. Vedeli by ste narysovať aj trojuholník z úlohy 5.2?

Riešenie

Riešenie úlohy 5 nám dá aj návod na narysovanie takéhoto trojuholníka ABC . Najprv podľa vety *sss* narysujeme trojuholník ABP so stranami $|AB| = 7,8$ cm, $|BP| = 3,9$ cm a $|AP| = \frac{3}{4}|AY| = 5,1$ cm. Potom na polpriamke opačnej k PB zvolíme bod X tak, že $|XP| = 1,3$ cm a analogicky bod $Y \in \overrightarrow{PA}^+$, $|PY| = \frac{1}{4}|AY| = 1,7$ cm. Nakoniec bod C nájdeme na priesečníku priamok AX a BY .

A teraz sa dostaneme k samotným ťažniciam. Ide o druhú možnosť, ako pracovať so stredmi strán. Miesto spájania stredu strany s iným stredom, budeme ho spájať s vrcholom – zjavne protiľahlým.

Ťažnica

Ťažnica trojuholníka je úsečka, ktorá spája vrchol so stredom protiľahlej strany. Označujeme ju písmenom t s indexom strany, ktorej stredom prechádza. Teda napr. $t_a = \overline{AS_a}$.

Úloha 5.4. V trojuholníku ABC je bod S_c stredom strany AB a bod S_b je stred strany AC . Úsečky BS_b a CS_c sa pretínajú v bode P . Vieme, že $|BC| = 8$ cm, $|BS_b| = 6$ cm a $|CS_c| = 9$ cm. Určte dĺžky

- a) $|S_bS_c|$, b) $|S_cP|$, c) $|PC|$, d) $|S_bP|$, e) $|PB|$.

Riešenie

Úlohu možno riešiť analogicky ako úlohu 5, preto uvedieme len výsledky: $|S_bS_c| = 4$ cm, $|S_cP| = 3$ cm, $|PC| = 6$ cm, $|S_bP| = 2$ cm a $|PB| = 4$ cm.

Riešenie tejto úlohy tiež vyplýva zo všeobecného tvrdenia o ťažniciach, ktoré teraz uvedieme. Všimnime si, že konkrétne rozmery nám neovplyvňujú pomery, s ktorými sme pracovali. Preto môžeme vysloviť nasledovné tvrdenie.

Veta

Ľubovoľné dve ťažnice trojuholníka sa delia v pomere $2 : 1$, pričom dlhšia časť ťažnice obsahuje vrchol trojuholníka.

Dôkaz. Uvažujme ťažnice t_b a t_c a ich priesečník označme P . Z vlastností stredných priecok už vieme, že $|S_bS_c| = |BC|/2$ a $S_bS_c \parallel BC$. Z tejto rovnobežnosti dostaneme, že trojuholníky BCP a S_bS_cP sú podobné podľa vety *uu* s koeficientom $|BC| : |S_bS_c| = 2 : 1$. Preto $|BP| : |PS_b| = |CP| : |PS_c| = 2 : 1$. $\square$

Teraz prídeme k ďalšej veľmi dôležitej vlastnosti ťažníc, o ktorej ste možno už aj počuli.

Veta

Ťažnice trojuholníka sa pretínajú v jednom bode.

Skúste toto tvrdenie dokázať. Pokiaľ sa vám nedarí, tak uvedieme ešte jednu návodnú úlohu spolu s návodnými úvahami.

Úloha 5.5. V trojuholníku z úlohy 5.4 uvažujme tretiu ťažnicu AS_a , ktorá pretne ťažnicu CS_c v bode Q . Určte $|QC|$.

Riešenie

Ťažnice t_a a t_c sa tiež delia v pomere $2 : 1$, preto $|QC| = 4$ cm.

Dokazovať, že tri priamky sa pretínajú v jednom bode, je často pomerne náročnou geometrickou úlohou. Pokiaľ ste sa s takou nestretli, tak nemusí byť zlý nápad vyskúšať si to najprv s osami strán či uhlov. Priamočiarym spôsobom je vziať priesečník dvoch priamok, označiť ho napr. X a ukázať, že bodom X prechádza aj tretia priamka. (Tento prístup funguje aj pri iných útvaroch ako priamkach.) Príp. môžeme

priesečník iných dvoch priamok označiť Y a ukázať, že body X a Y sú totožné. Skúste k tomu využiť riešenia predošlých úloh.

Dôkaz vety 5. Nech P je priesečník ťažníc t_b a t_c . Z vety 5 vieme, že ťažnica t_b delí ťažnicu t_c v pomere $2 : 1$, preto $|CP| = \frac{2}{3}t_c$. Teraz priesečník ťažníc t_a a t_c označme Q . Rovnako z vety 5 dostaneme, že $|CQ| = \frac{2}{3}t_c$. Každý z bodov P, Q sa nachádza na ťažnici t_c , teda úsečke CS_c vo vzdialenosti $\frac{2}{3}t_c$ od bodu C . To znamená, že body P a Q sú totožné, čiže ide o spoločný priesečník všetkých troch ťažníc. $\square$

Definícia

Spoločný priesečník ťažníc nazývame *ťažisko* a zvyčajne ho označujeme T .

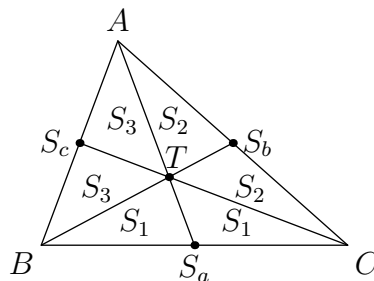
Ťažnice majú ešte ďalšie vlastnosti, ktoré teraz uvedieme. Skôr než si prečítate dôkazy nižšie, skúste si ich dokázať samostatne.

Ďalšie vlastnosti ťažníc

- (i) Každá ťažnica delí trojuholník na dva trojuholníky s rovnakým obsahom.
- (ii) Ťažnice delia trojuholník na 6 trojuholníkov s rovnakým obsahom.

Dôkaz (i) Oba trojuholníky majú zhodnú stranu (rovnú polovici strany trojuholníka) a výšku, preto majú rovnaký obsah.

Dôkaz (ii) Úsečka TS_a je ťažnicou v trojuholníku BCT , preto podľa (i) trojuholníky BS_aT a CS_aT majú rovnaký obsah. Označme ho S_1 . Analogicky platí aj $S_{CS_bT} = S_{AS_bT} = S_2$ a $S_{AS_cT} = S_{BS_cT} = S_3$ (pozri tiež obrázok 5). Podľa (i) majú aj trojuholníky ABS_a a ACS_a rovnaký obsah, teda $2S_3 + S_1 = 2S_2 + S_1$, z čoho po odčítaní S_1 a vydelení dvomi dostaneme $S_3 = S_2$. Rovnakou úvahou pre trojuholníky CAS_c a CBS_c dostaneme $S_1 = S_2$, teda $S_1 = S_2 = S_3$.



Iný dôkaz (ii) Vezmime si trojuholník BTS_c . Nech P a Q sú postupne päty kolmíc z bodov A a S_c na priamku BS_b . Pravouhlé trojuholníky BS_cQ a BAP zdieľajú uhol pri vrchole B , preto sú podľa vety *uu* podobné s koeficientom podobnosti $|BS_c| : |BA| = 1 : 2$. Preto výška S_cQ trojuholníka BTS_c má polovičnú dĺžku ako výška AP trojuholníka ABS_b . Teda

$$\begin{aligned} S_{BTS_c} &= \frac{1}{2} \cdot |BT| \cdot |S_cQ| = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}|BS_b| \cdot \frac{1}{2}|AQ| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}|BS_b||AQ| = \\ &= \frac{1}{3}S_{ABS_b} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{6}S_{ABC}. \end{aligned}$$

Obsah trojuholníka BTS_c je tak $\frac{1}{6}$ obsahu trojuholníka ABC . Tento záver platí pre každý zo šiestich malých trojuholníkov.

Úloha 5.13 (KMS 17/18-L2-3). V rovnoramennom trojuholníku ABC so základňou AB označíme D stred strany AB . Stred úsečky CD označíme M . Priamka BM pretína stranu AC v bode E . Dokážte, že $2 \cdot |CE| = |AE|$.

Úloha 5.14 (KMS 19/20-Z2-5). Na strane AB trojuholníka ABC sú dané body D a E tak, že platí $|AD| = |DE| = |EB|$ a body A, D, E, B ležia na priamke v tomto poradí. Rovnobežka so stranou AC , ktorá prechádza bodom D , pretína stranu BC v bode F . Ďalej nech M je stred strany BC . Priamka EM pretína priamku AC v bode P . Dokážte, že priamka AF prechádza stredom úsečky BP .

Nasledujúca úloha z matematickej olympiády neslúži na aplikáciu ľazníc, ale skôr na aplikáciu toho, čo sa využíva pri dokazovaní ich vlastností.

Úloha 5.15 (MO64 C-S-2). Označme K a L postupne body strán BC a AC trojuholníka ABC , pre ktoré platí $|BK| = \frac{1}{3}|BC|$, $|AL| = \frac{1}{3}|AC|$. Nech M je priesečník úsečiek AK a BL . Vypočítajte pomer obsahov trojuholníkov ABM a ABC .

6 Výšky

Výška

Výška trojuholníka ABC na stranu a je úsečka AP_a , ktorá je kolmá na stranu a a jej koncový bod P_a leží na priamke BC . Bod P_a nazývame *päta výšky*. Výšku na stranu a označujeme v_a .

V literatúre sa môžeme stretnúť s tým, že výška je definovaná ako:

- (i) priamka AP_a ,
- (ii) dĺžka úsečky AP_a .

Teda výška trojuholníka môže byť priamka, úsečka a číslo. Výšku ako číslo používame najmä pri úvahách o obsahoch. Hoci v tomto materiáli berieme výšku ako úsečku, táto časť bude výnimkou a budeme v nej výšku považovať za priamku. Totiž pri chápaní výšky ako úsečky sa výšky v tupouhlom trojuholníku nepretínajú v jednom bode.

Začneme s jednoduchými vlastnosťami, ktoré sa týkajú výšok, aby ste si precvičili riešenie jednoduchších úloh o výškach a tiež získali užitočné znalosti.

Úloha 6.1. V ostrouhlom trojuholníku ABC určte veľkosti uhlov AP_aP_b a AP_aP_c .

Riešenie

Kvôli pravým uhlom AP_bB a AP_aB ležia body P_a, P_b na Tálesovej kružnici τ nad priemerom AB . Z pravouhlého trojuholníka ABP_b dopočítame $|\angle P_bBA| = 180^\circ - 90^\circ - |\angle BAP_b| = 90^\circ - \alpha$. Uhly P_bBA a P_bP_aA sú obvodové uhly kružnice τ prislúchajúce tetive AP_b . Vďaka ostrouhlosti trojuholníka sa obe nachádzajú v rovnakej polrovine určenej priamkou AP_b . Preto

$$|\angle P_bP_aA| = |\angle P_bBA| = 90^\circ - \alpha.$$

Analogicky vďaka pravým uhlom CP_cA a CP_aA ležia body A, C, P_a, P_c na kružnici v tomto poradí (lebo trojuholník ABC je ostrouhlý). Potom

$$|\angle AP_aP_c| = |\angle ACP_c| = 180^\circ - 90^\circ - |\angle CAB| = 90^\circ - \alpha.$$

Úloha 6.2. Ako sa zmení výsledok úlohy pre tupouhlý trojuholník?

Riešenie

To, že body P_a, P_b ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom AB stále platí, rovnako aj pre body P_a, P_c, A, C . Pri tupouhlom trojuholníku sa menia vzájomné polohy bodov na priamkach, a teda aj ich poradie na kružniciach. Vzájomné polohy bodov sú dané tým, pri ktorom vrchole je tupý uhol.

Nech $\alpha > 90^\circ$. Vtedy máme tetivový štvoruholník AP_aBP_b , v ktorom rovnako platí $|\angle P_bP_aA| = |\angle P_bBA|$. Rozdielne nám však vyjde $|\angle P_bBA| = 90^\circ - |\angle BAP_b| = 90^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha - 90^\circ$, keďže teraz sú uhly BAP_b a BAC susedné a nie totožné. Veľkosť uhla AP_aP_c vyjde analogicky, teda

$$|\angle P_bP_aA| = |\angle AP_aP_c| = \alpha - 90^\circ.$$

Nech $\beta > 90^\circ$. Vtedy body A, P_b, B, P_a ležia na kružnici v tomto poradí a platí

$$|\angle P_bP_aA| = |\angle P_bBA| = 90^\circ - \alpha.$$

Avšak na druhej kružnici ležia body v poradí A, C, P_c, P_a , preto

$$|\angle AP_aP_c| = 180^\circ - |\angle ACP_c| = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha.$$

Analogicky keď $\gamma > 90^\circ$, tak $|\angle AP_aP_b| = 90^\circ + \alpha$ a $|\angle AP_aP_c| = 90^\circ - \alpha$.

Výsledok tejto úlohy možno jednotne prezentovať tým, že uhol medzi priamkami AP_a (teda výškou v_a) a P_aP_b je $|90^\circ - \alpha|$ a rovnako veľký je aj uhol medzi priamkami AP_a a P_aP_c . Totiž uhol medzi priamkami je z definície vždy z intervalu $\langle 0^\circ; 90^\circ \rangle$.

Úloha 6.3. V trojuholníku ABC uvažujme trojuholník $S_aS_bS_c$ tvorený stredmi jeho strán. Čo za priamky v trojuholníku ABC tvoria výšky trojuholníka $S_aS_bS_c$?

Dostávame sa k tej najznámejšej vlastnosti výšok – pretínajú sa v jednom bode. Dôkaz tohto tvrdenia je náročnejší ako pri osiach strán a uhlov (odporúčame, aby ste tie dôkazy už mali absolvované). Preto uvedieme jednu úlohu tohto typu, na ktorej si môžete vyskúšať dokazovanie tvrdení takéhoto typu.

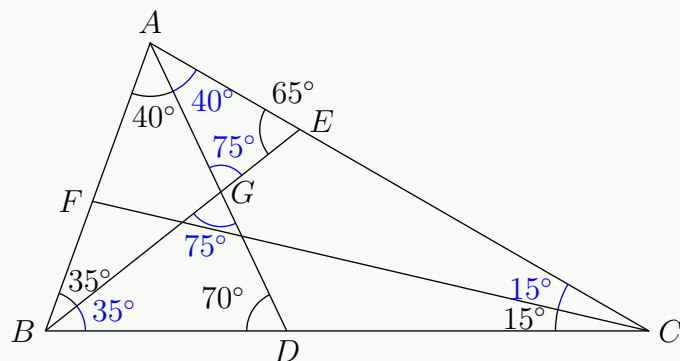
Úloha 6.4. V trojuholníku ABC ležia na stranách BC, CA a AB postupne body D, E a F tak, že platí $|\angle BAD| = 40^\circ$, $|\angle ABE| = 35^\circ$, $|\angle ADB| = 70^\circ$, $|\angle AEB| = 65^\circ$ a $|\angle BCF| = 15^\circ$. Dokážte, že priamky AD, BE a CF sa pretínajú v jednom bode.

Riešenie

Označme priesečník priamok AD a BE ako G . Postupne si dopočítame uhly:

- $|\angle AGE| = |\angle BGD| = 35^\circ + 40^\circ = 75^\circ$ (vonkajšie uhly trojuholníka ABG);
- $|\angle GBD| = 180^\circ - |\angle BGD| - |\angle GDB| = 180^\circ - 75^\circ - 70^\circ = 35^\circ$;
- $|\angle GAE| = 180^\circ - |\angle EGA| - |\angle AEG| = 180^\circ - 75^\circ - 65^\circ = 40^\circ$;
- $|\angle ACB| = 180^\circ - |\angle CBA| - |\angle BAC| = 180^\circ - (35^\circ + 35^\circ) - (40^\circ + 40^\circ) = 30^\circ$;
- $|\angle FCE| = |\angle ACB| - |\angle FCB| = 30^\circ - 15^\circ = 15^\circ$.

Dostali sme teda $|\angle BAD| = |\angle DAC| = 40^\circ$, $|\angle ACF| = |\angle FCB| = 15^\circ$ a $|\angle CBE| = |\angle EBA| = 35^\circ$. Preto polpriamky AD, BE a CF sú osi vnútorných uhlov trojuholníka ABC , o ktorých je známe, že sa pretínajú v jednom bode.



Po tejto úlohe sme videli dva spôsoby ako dokázať, že tri priamky sa pretínajú v jednom bode:

1. Pretneme dve z nich a ukážeme, že ich priesečníkom prechádza aj tretia. To sme videli pri osiach strán a uhlov. Rovnako, len s trochou viac práce, sme dokázali tvrdenie o ťažniciach.
2. Dokážeme, že skúmané tri priamky sú tri známe priamky, o ktorých vieme, že sa pretínajú v jednom bode. Tu sme ukázali, že ide o osi uhlov. V iných úlohách môžeme využiť aj osi strán, ťažnice a po nasledovnej úlohe aj výšky.

Videli sme už teraz viaceré druhy dôkazov, tak sa skúsme pustiť k samotnému tvrdeniu o výškach.

Veta

Výšky trojuholníka sa pretínajú v jednom bode.

Dôkaz 1. Riešenie založíme na pozorovaní v trojuholníku tvorenom strednými priesečkami. Vezmeme si trojuholník ABC a stredy strán a, b, c označme postupne S_a, S_b, S_c . Výška v'_a trojuholníka $S_aS_bS_c$ na stranu S_bS_c prechádza bodom S_a a je kolmá na stranu S_bS_c , a teda je kolmá aj na stranu BC – využili sme, že $S_bS_c \parallel BC$ z vlastností stredných priesečok. Preto je v'_a os strany BC . Teda výšky trojuholníka $S_aS_bS_c$ sú osi strán trojuholníka ABC a o nich už vieme, že pretínajú v jednom bode.

Dokázali sme, že výšky sa pretínajú v jednom bode v *každom* trojuholníku? (Např. by sa mohlo stať, že trojuholník $S_aS_bS_c$ je vždy ostrouhlý, čím by sme nemali tvrdenie dokázané pre tupouhlé a pravouhlé trojuholníky.) Keďže trojuholník $S_aS_bS_c$ je podobný s trojuholníkom ABC s koeficientom $\frac{1}{2}$ (opäť vlastnosť stredných priesečok) a vieme si ho zvoliť ľubovoľne, tak vieme tak dostať ľubovoľný trojuholník $S_aS_bS_c$.

Čistejší spôsob dôkazu je začať s ľubovoľným trojuholníkom ABC . Dokreslíme trojuholník XYZ tak, aby $XY \parallel AB$, $YZ \parallel BC$ a $ZX \parallel CA$. Potom $|BC| = |ZA| = |AY|$, teda A, B, C sú postupne stredy strán YZ, ZX a XY . Preto výšky v trojuholníku ABC sú osi strán trojuholníka XYZ , a preto sa pretínajú v jednom bode. $\square$

V pravouhlom trojuholníku sa všetky tri výšky pretínajú vo vrchole pravého uhla, ktorý je zároveň päťou dvoch výšok. Preto v nasledujúcich dôkazoch budeme predpokladať, že $\alpha \neq 90^\circ$, teda žiadna z piat výšok P_a, P_b, P_c nesplýva s vrcholom trojuholníka ani s inou päťou.

Dôkaz 2. Inšpirovaní riešením úloh 6.1 a 6.2 sa pozrieme na trojuholník $P_aP_bP_c$. Podľa úloh 6.1 a 6.2 výška v_a zvierá rovnaké uhly s každou z priamok P_aP_b, P_aP_c , ktoré nie sú totožné. Preto je výška v_a osou uhla $P_bP_aP_c$.

Ak je trojuholník ABC ostrouhlý, tak všetky výšky v_a, v_b a v_c sú osami vnútorných uhlov trojuholníka $P_aP_bP_c$. Preto sa pretínajú v jednom bode. Ak je trojuholník ABC tupouhlý, bez ujmy na všeobecnosti s tupým uhlom BAC , tak výška v_a je osou vonkajšieho uhla $P_bP_aP_c$. Výšky v_b a v_c sú však osami zvyšných dvoch vonkajších uhlov trojuholníka $P_aP_bP_c$. Aj tieto tri osi sa pretínajú v jednom bode – v strede kružnice pripísanej k strane P_bP_c . $\square$

Dôkaz 3. Vrcholy trojuholníka si označíme A, B, C tak, aby uhol α bol najväčší. Priesečník výšok v_b a v_c označíme H . Dokážme, že priamka AH je kolmá na stranu a . To bude znamenať, že je totožná výškou v_a , teda bod H bude spoločným bodom všetkých troch výšok, čím bude tvrdenie dokázané. K tomu označíme priesečník priamok AH a BC ako X .

Body P_b a P_c ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom BC . Keďže uhly β a γ sú ostré, tak oba body P_b, P_c ležia v polrovine BCA . Preto z obvodových uhlov platí $|\angle P_c P_b B| = |\angle P_c C B| = 90^\circ - \beta$. Taktiež na Tálesovej kružnici τ nad priemerom AH ležia body P_b, P_c .

Ak $\alpha < 90^\circ$, tak body A, P_b, H, P_c ležia na kružnici τ v tomto poradí. Preto $|\angle P_c A H| = |\angle P_c P_b H| = |\angle P_c P_b B| = 90^\circ - \beta$. Z trojuholníka ABX dopočítame $|\angle B X A| = 180^\circ - |\angle X B A| - |\angle B A X| = 180^\circ - \beta - (90^\circ - \beta) = 90^\circ$.

Ak $\alpha > 90^\circ$, tak na kružnici τ máme body v poradí A, P_c, H, P_b . Preto $|\angle P_c H A| = |\angle P_c P_b A| = |\angle P_c P_b B| = 90^\circ - \beta$. Z trojuholníka $H B X$ dopočítame $|\angle B X H| = 180^\circ - |\angle X B H| - |\angle B H X| = 180^\circ - \beta - (90^\circ - \beta) = 90^\circ$.

Teda v oboch prípadoch sú priamky AH a BC na seba kolmé, ako sme chceli dokázať. □

Priesečník výšok trojuholníka nazývame *ortocentrum* a zvyčajne ho označujeme H .

7 Tetivové štvoruholníky

Tetivový štvoruholník (Cyclic quadrilateral)

Tetivový štvoruholník je taký štvoruholník, ktorému možno opísať kružnicu. Teda každá jeho strana je tetiva tej istej kružnice.

Ako vieme zistiť, či štvoruholník $ABCD$ je tetivový? Ukážeme si niekoľko spôsobov. Pre jednoduchosť budeme uvažovať len konvexné štvoruholníky. To sú také, kde všetky vnútorné uhly majú menšiu veľkosť ako 180° . Inak povedané, žiaden z jeho vrcholov sa nenachádza vo vnútri trojuholníka tvoreného zvyšnými tromi vrcholmi.

Prvoplánový spôsob je konštrukčný. Vieme, že keď chceme opísať trojuholníku kružnicu, tak jej stred nájdeme na priesečníku osí strán. To isté vieme spraviť aj pri štvoruholníku. Narysujeme osi všetkých štyroch jeho strán (resp. stačí troch) a skontrolujeme, či sa pretáli v jednom bode. Ak áno, tak ich spoločný priesečník je rovnako vzdialený od všetkých vrcholov štvoruholníka a teda je stredom kružnice, ktorá prechádza všetkými vrcholmi A, B, C, D . Avšak použiť tento postup pri dokazovaní nie je veľmi jednoduché – dokazovať, že tri priamky sa pretínajú v jednom bode, nie je vôbec jednoduché. Preto by sme radi objavili aj iné kritériá. Vedeli by sme to určiť nejako s uhlami?

V sekcii 2 sme spoznali vetu o obvodovom a stredovom uhle. Na základe nej vieme, že v tetivovom štvoruholníku $ABCD$ sú uhly ACB a ADB zhodné, keďže ide o obvodové uhly prislúchajúce rovnakému oblúku kružnice opísanej štvoruholníku $ABCD$. Tento vzťah platí aj opačne. Body A, B, C ležia isto na kružnici k . Bod D leží na kružnici k práve vtedy, keď

$$|\angle ACB| = |\angle ADB|.$$

Týmto sme našli jednoduchú uhlovú podmienku, ktorou vieme zistiť, či je štvoruholník tetivový.

Vieme sa pozrieť aj na inú dvojicu uhlov. Tiež sme si ukazovali, že keď máme obvodové uhly ABC a CDA , ktoré prislúchajú tej istej tetive AC , ale opačným oblúkom, tak súčet ich veľkostí je 180° . Keďže bod D leží v polrovine opačnej k ACB , tak bod D leží na oblúku AC kružnice opísanej trojuholníku ABC neobsahujúcim bod B práve vtedy, keď platí $|\angle CDA| = 180^\circ - |\angle ABC|$. Po drobnej úprave vieme tiež sformulovať, že konvexný štvoruholník $ABCD$ je tetivový práve vtedy, keď

$$|\angle CDA| + |\angle ABC| = 180^\circ.$$

Práve tieto dve uhlové podmienky sa najčastejšie používajú na overovanie tetivovosti štvoruholníkov, keďže sa overujú jednoducho. Uvedomme si však, že obe majú formu ekvivalencie. Vieme ich teda využiť aj v situácii, keď už o nejakom štvoruholníku vieme, že je tetivový (máme to v zadaní alebo sme na to prišli) a získať tak užitočné vzťahy o jeho uhloch.

Vedeli by sme odvodiť aj nejakú podmienku zahŕňajúcu dĺžky strán? Aj to je možné, hoci táto podmienka sa využíva skôr pri náročnejších úlohách. Jej odvodenie však nie je až tak zložitá. Skúste ju najprv objaviť sami. Vezmite si tetivový štvoruholník $ABCD$. Vedeli by ste objaviť nejaké pomery dĺžok strán, ktoré sú rovnaké? Pomery ľahko dostaneme z podobných trojuholníkov. Skúste nejaké nájsť. Bude však treba si k tomu niečo dokresliť.

Už vieme, že v tetivovom štvoruholníku platí $|\angle ACB| = |\angle ADB|$. Zhodné uhly vieme využiť na nájdenie podobných trojuholníkov. Tiež platí $|\angle CAD| = |\angle CBD|$. V ktorých trojuholníkoch sa nachádzajú tieto uhly? Keď si označíme priesečník uhlopriečok AC a BD ako P , tak ide o trojuholníky APD a BPC . Keďže sa zhodujú v dvoch uhloch, tak sú podľa vety *uu* podobné. Preto

$$\frac{|PA|}{|PD|} = \frac{|PB|}{|PC|}. \quad (1)$$

Platí to aj obrátene – zaručí nám pomer (1) to, že konvexný štvoruholník $ABCD$ s priesečníkom uhlopriečok P je tetivový? Keďže uvažujeme konvexný štvoruholník, tak bod P sa nachádza vnútri úsečiek AC a BD , preto uhly APD a BPC sú vrcholové, teda zhodné. To spolu s pomerom (1) znamená, že trojuholníky APD a BPC sú podobné podľa vety *us*. Preto $|\angle ACB| = |\angle ADB|$, čo znamená, že štvoruholník $ABCD$ je tetivový.

Tu sme prešli priamky AC a BD . Čo ak by sme uvažovali priesečník iných dvoch priamok? Nech sa priamky AB a CD pretínajú v bode M . Ak je štvoruholník $ABCD$ tetivový, tak platí $|\angle CDA| = 180^\circ - |\angle ABC| = |\angle MDC|$. Takisto aj uhly AMD a CMB sú zhodné, keďže sú totožné. Preto trojuholníky AMD a CMB sú podobné podľa vety *uu*. Z toho taktiež dostávame rovnosť pomerov

$$\frac{|MA|}{|MD|} = \frac{|MC|}{|MB|}. \quad (2)$$

A obrátenie, ak platí rovnosť (2), tak keďže $|\angle AMD| = |\angle CMD|$, tak trojuholníky AMD a CMB sú podobné podľa vety *us*. Preto $|\angle CDA| = |\angle MDA| = |\angle MBC| = 180^\circ - |\angle ABC|$, preto je štvoruholník $ABCD$ tetivový.

V praxi často rovnosť (1) stretneme v tvare bez zlomkov, teda ako rovnosť súčinov

$$|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|.$$

Na tento tvar sa dá pozrieť aj zaujímavým pohľadom. Pre pevne zvolený bod P vnútri kružnice k platí, že keď ním vedieme tetivu AC kružnice k , tak hodnota $|PA| \cdot |PC|$ sa nemení. Preto si táto hodnota zaslúžila názov *mocnosť bodu P ku kružnici k* . Záujemcovia si o nej vedľa viac prečítať v materiáloch [?].

Na záver si zhrnieme všetky kritéria, ktoré sme si odviedli.

Veta

Tvrdenie: „Štvoruholník $ABCD$ je tetivový,“ je ekvivalentné každému z nasledovných tvrdení:

- (i) osi niektorých troch strán štvoruholníka $ABCD$ sa pretínajú v jednom bode;
- (ii) $|\angle ACB| = |\angle ADB|$;
- (iii) $|\angle ABC| + |\angle ADC| = 180^\circ$;
- (iv) $|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|$, kde P je priesečník jeho uhlopriečok;
- (v) $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$, kde P je priesečník priamok AB a CD (platí len pre prípad, keď sú priamky AB a CD rôznobežné).

Pozor, je dôležité (okrem (v)), aby body A, B, C, D ležali na ňom v tomto poradí!

Úloha 7.1. Ktoré z nasledovných 4-uholníkov sú vždy tetivové?

- | | |
|----------------|---|
| a) štvorec | e) lichobežník |
| b) obdĺžnik | f) rovnoramenný lichobežník |
| c) kosoštvorec | g) pravouhlý lichobežník |
| d) kosodĺžnik | h) deltoid (štvoruholník, ktorý má dve dvojice susedných strán rovnako dlhé). |

Úloha 7.2. V trojuholníku ABC nájdite spomedzi bodov A, B, C, H (ortocentrum), P_a, P_b, P_c (päty výšok) čo najviac štvoríc bodov, ktoré tvoria tetivový štvoruholník.

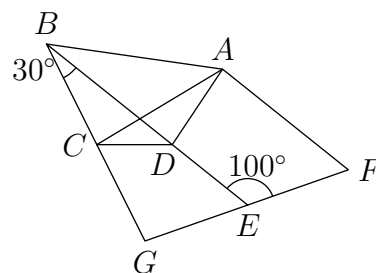
Úloha 7.3. Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník, ktorého opísaná kružnica má polomer 4 cm. Ďalej platí $|AB| = 7$ cm, $|\angle ABC| = 50^\circ$ a $|\angle BCD| = 140^\circ$.

- a) Určte veľkosti uhlov CDA a DAB .
b) Narysujte takýto štvoruholník $ABCD$.

Časť a) možno vyriešiť aj s približným náčrtom, príp. so žiadnym. Načrtnúť si konfiguráciu realisticky však nie je až tak jednoduché. V niektorých situáciách nám to vie pomôcť. Taktiež niektorým z nás pomôže pri riešení presný náčrt alebo aj samotné zamyslenie sa nad tým, ako danú konfiguráciu zostrojiť.

Úloha 7.4. Nech $ABCD$ a $CDEF$ sú tetivové štvoruholníky, ktoré majú spoločnú úsečku CD a žiaden iný bod. Vieme, že $|\angle ABC| = 80^\circ$ a $|\angle CFE| = 60^\circ$. Určte veľkosť konvexného uhla ADE .

Úloha 7.5. Máme dané tetivové štvoruholníky $ABCD$ a $ADEF$ ako na obrázku (rozmery sú len približné). Body B, D, E ležia na priamke a bod G je priesečníkom priamok BC a EF . Vieme, že $|\angle CBD| = 30^\circ$ a $|\angle DEF| = 100^\circ$.



Obr. 5

- a) Určte $|\angle CAF|$.
b) Dokážte, že štvoruholník $ACGF$ je tetivový.

Úloha 7.6. Nech $ABCD$ a $CDEF$ sú tetivové štvoruholníky také, že bod C je vnútorným bodom úsečky BF a bod D je vnútorným bodom úsečky AE . Dokážte, že priamky AB a EF sú rovnobežné.

Úloha 7.7. V štvoruholníku $PLUS$ platí $|\angle PUS| = 50^\circ$, $|\angle PUL| = 20^\circ$ a $|\angle SPL| = 110^\circ$.

- a) Rozhodnite, či je štvoruholník $PLUS$ tetivový.
b) Určte veľkosť uhla PLS .

Úloha 7.8. V trojuholníku ABC platí $\alpha = 75^\circ$ a $\beta = 40^\circ$. Os uhla ABC pretína stranu AC v bode D . Na strane BC je zvolený bod E tak, že platí $|\angle CED| = 75^\circ$. Určte $|\angle AEB|$.

Úloha 7.9. V trojuholníku ABC platí $\beta = 80^\circ$ a $\gamma = 40^\circ$. Na strane BC si zvolíme ľubovoľný bod D . Na polpriamke k opačnej k BA si zvolíme bod E tak, aby $|BE| = |BD|$. Na priamke AD si zvolíme bod F (rôzny od D) tak, aby štvoruholník $BEFD$ bol tetivový. Dokážte, že štvoruholník $ABFC$ je tetivový.

Úloha 7.10 (KMS 14/15-L2-6). V kosoštvorci $KLMN$ platí $|\angle KLM| = 40^\circ$. Označme stred strany LM ako S . Päťu kolmice na priamku NS prechádzajúcu cez bod K označme X . Zistite veľkosť uhla MXN .

Úloha 7.11 (MO72 B-I-6, zjednodušené). Daný je trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole B . Označme I stred kružnice jemu vpísanej a M stred prepony AC . Predpokladajme, že body B, I, M, C ležia na jednej kružnici. Určte veľkosť uhla BAC .

8 Úlohy kombinujúce rôzne poznatky

Na záver materiálu uvádzame sadu úloh prevažne z matematických súťaží, v ktorých možno využiť rôzne tvrdenia o trojuholníkoch, ktorým sme sa v materiáli venovali. Rozdiel od predošlých súťaží je, že v týchto úlohách vám nenaznačujeme, aký významný prvok trojuholníka alebo ktoré tvrdenie sa bude dať v ňom použiť. Budete to musieť odhaliť sami.

Úloha 8.1. V trojuholníku ABC platí $|AT| = |BC|$. Dokážte, že $\angle BTC = 90^\circ$.

Úloha 8.2 (MO69 B-S-2). Dokážte, že stredy kružníc zvonka pripísaných jednotlivým stranám ľubovoľného konvexného štvoruholníka ležia na jednej kružnici.

(Kružnicou pripísanou napríklad strane AB konvexného štvoruholníka $ABCD$ rozumieme kružnicu, ktorá sa dotýka strany AB a polpriamok opačných k polpriamkam AD a BC .)

Úloha 8.3 (MO68 B-I-5). Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník, v ktorom $AD \perp BD$. Označme M priesečník jeho uhlopriečok a označme P päť kolmice z bodu M na priamku AB a Q päť kolmice z bodu B na priamku AC . Dokážte, že bod M je stredom kružnice vpísanej trojuholníku PQD .

Úloha 8.4 (KMS 18/19-L1-9). Na Stanovačke KMS je potrebný KMS $STAN$. Ide o tetivový štvoruholník $STAN$. Na polpriamkach SN a AN sa nachádzajú postupne body P_1, Q_1 a na polpriamkach opačných k polpriamkam SN a AN sa nachádzajú postupne body P_2, Q_2 . Pre tieto body platí $|SP_1| = |SP_2| = |AT|$ a $|AQ_1| = |AQ_2| = |ST|$. Stredy úsečiek P_1Q_1 a P_2Q_2 označíme postupne W a G . Čím je tento KMS $STAN$ výnimočný? Predsa má $SWAG$! Dokonca, $SWAG$ je obdĺžnik, dokážte to!

Úloha 8.5 (MO72 C-S-2). Nech ABC je pravouhlý trojuholník, K stred prepony AB a L stred kratšej odvesny AC . Nech P je priesečník úsečky KL a kružnice s priemerom BC . Dokážte, že uhly PAC a PBC sú zhodné.

Úloha 8.6 (MO74 C-I-5). Nech ABC je trojuholník a P a Q sú stredy jeho strán BC , resp. AC . Nech K je stred úsečky PQ , L priesečník priamky BQ a rovnobežky s AC cez K a M priesečník priamky PL a úsečky AC . Dokážte, že M je stred úsečky AQ .

Úloha 8.7 (MO73 C-I-2). Nech ABC je pravouhlý trojuholník s preponou AC . Nech M je jej stred, pričom $|BC| = |CM|$. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom ABC a ABM majú rovnaké polomery.

Úloha 8.8 (MO73 C-S-2). Nech $ABCD$ je lichobežník so základňami AB a CD . Nech sa osi uhlov CDA a DAB pretínajú na úsečke AB . Dokážte, že $|AD| + |BC| = |AB|$.

Úloha 8.9 (MO72 C-I-3). Nech ABC je trojuholník M a N stredy jeho strán AB , resp. AC a P stred úsečky MN . Nech $|MN| = |AP|$. Dokážte, že priamky BP a CP sú navzájom kolmé.

Úloha 8.10 (MO71 C-I-3). Nech ABC je trojuholník, D a E vnútorné body jeho strany BC také, že $|BD| = |DE| = |EC|$, a F a G vnútorné body jeho strany AC také, že $|AG| = |GF| = |FC|$. Dokážte, že pomer obsahu trojuholníka ohraničeného úsečkami AE, GD, BF a obsahu trojuholníka ABC má jedinu možnú hodnotu, a určte ju.

Úloha 8.11 (MO68 C-I-2). Nech ABC je trojuholník a D a E sú body strany AB také, že $|AD| = |DE| = |EB|$. Nech F a G sú obrazy bodu C podľa stredov A , resp. B . Nech I je priesečník priamok CD a BF a J priesečník CE a AG . Dokážte, že priesečník priamok AI a BJ leží na priamke FG .

Úloha 8.12 (MO59 C-S-2). Nech k a l sú kružnice s polomermi 6, resp. 4, ktoré majú vnútorný dotyk v bode B . Nech bod O je stred kružnice l , bod A je priesečník kružnice k a priamky OB a bod C je priesečník kružnice k a dotýčnice z bodu A ku kružnici l . Určte dĺžky strán trojuholníka ABC .

Úloha 8.13 (MO58 C-I-2). Pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB je opísaná kružnica. Päť kolmíc z bodov A, B na dotýčnicu k tejto kružnici v bode C označme D, E . Vyjadrite dĺžku úsečky DE pomocou dĺžok odvesien trojuholníka ABC .

9 Nápovede k úlohám

1.8. Pokiaľ by ste niektorý z uhlov v obrázku poznali, tak by ste vedeli dopočítať zvyšné a aj uhol ACE . Tak si dôkazovú úlohu transformujeme na určenie veľkosti uhla ACE . Spravte teda to isté, len použite pritom premennú.

1.9. Okrem rovnostranného trojuholníka vieme v úlohe nájsť aj rovnoramenné trojuholníky, ktoré nám umožnia postupne dopočítať všetky uhly.

1.10. Označte si niektorý uhol v obrázku premennou a postupne vyjadrujte ostatné. Využívajte pritom rovnobežnosť, os uhla a stred strany.

1.12. Úloha nevyzerá podobne ako úloha 1.9 náhodou. Poriadne si premyslite, ako možno jej riešenie využiť tu.

1.13. Označte si niektorý z uhlov premennou. Vyjadrite zvyšné uhly pomocou neho. Potom budete vedieť zostaviť rovnicu, z ktorej tento uhol určíte.

3.8. Stačí ukázať, že uhlopriečky lichobežníka rozpoľujú uhly CDM a DCM . To sa dá cez počítanie uhlov. Čo Vám povie vlastnosť osi uhlopriečky AC o bode M ?

3.9. Vyjadrite $|\sphericalangle AIX|$ a $|\sphericalangle BIY|$ pomocou uhlov α a β . Dokazované tvrdenie vyzerá ako Pytagorova veta. Nájdite v konfigurácii pravouhlý trojuholník so zodpovedajúcimi dĺžkami strán.

3.10. Stačí nám ukázať, že dve z polpriamok AC , GC a EC sú osami uhlov trojuholníka AGE . Treba nájsť také dve, o ktorých to pôjde ľahko ukázať. Označte $|\sphericalangle FAB| = \alpha$. V závislosti na uhle α možno vyjadriť veľkosti viacerých uhlov v konfigurácii zo zadania.

3.13. Úsečkami AI , BI a CI rozdeľte trojuholník ABC na tri menšie trojuholníky. Vyjadrite pomocou ich obsahov obsah trojuholníka ABC .

3.15. Ukážte, že $|AL| = |AM|$, $|BM| = |BK|$ a $|CK| = |CL|$. Potom vám ostanú len tri neznáme dĺžky. Súčet každých dvoch je rovný dĺžke niektorej strany.

3.17. Dokážte, že $|\sphericalangle IAE| = |\sphericalangle IAF|$. Príde vám vhod hľadať podobné trojuholníky. Vďaka veľa pravým uhlom a rovnobežkám, ktoré sa dajú v konfigurácii nájsť, by ste ich mohli nájsť viacero.

4.3. Spojnice stredov strán sú stredné pričky. Zistíte, v akom trojuholníku?

4.4. Využite vlastnosť rovnobežníka.

5.7. Akú časť lichobežníka tvorí trojuholník ABD ? Nebojte sa pri výpočte obsahov použiť premenné na vzdialenosti, ktoré nepoznáte. Na základe vlastnosti ťažníc, viete zistiť, akú časť trojuholníka ABD tvorí skúmaný ružový trojuholník MBD .

5.8. Akú časť trojuholníka BCP tvorí štvoruholník $PESF$?

5.9. Úsečka AK spája vrchol so stredom strany, čiže je to ťažnica – v ktorom trojuholníku?

5.10. Ťažnicami vieme rozdeliť trojuholník na časti s rovnakým obsahom. V úlohe máme zadaný stred K uhlopriečky AC a aj podmienka $|AB| = 2|CD|$ vyzerá, že by mohla súvisieť s nejakým stredom. Preto skúste nájsť v zadanej konfigurácii ťažnicu. Budete si však musieť niečo dokresliť.

5.11. Priamka p prechádza stredom úsečky BE a je rovnobežná s priamkou BF . Teda na priamke p leží nejaká stredná prička – ktorého trojuholníka? Keď ho nájdete, tak získate ďalší stred. Zopakujte analogickú úvahu pre priamku q a dokončíte opätovným využitím stredných pričiek.

5.12. Úsečka S_aT je strednou pričkou v trojuholníku BCF , preto bod T je stredom strany FB . Dokončite ako v úlohe ??

5.13.

- Pomer $|CE| : |AE| = 1 : 2$ nám napovedá, že úsečka AC by mohla byť ťažnicou a bod E ťažiskom nejakého vhodného trojuholníka. Na ktorej priamke by ste mohli nájsť ďalšiu ťažnicu? Hľadajte priamky, ktoré prechádzajú stredom nejakej úsečky. Bude potrebné si do obrázka ešte niečo dokresliť.

- Dokreslite rovnobežku so základňou AB cez bod C a tiež polpriamky AM a BM , ktoré ju pretnú postupne v bodoch X a Y . Skúmajte trojuholník AXY .

5.14. Chceme vlastne dokázať, že na priamke AF leží ťažnica na stranu BP vo vhodnom trojuholníku – tým by mohol byť trojuholník ABP . Rozmyslite si, že k tomu stačí dokázať, že bod C je stred úsečky AP . No a na to sa dajú využiť stredné pričky.

5.15. V akom pomere sa delia úsečky AK a BL ? Viete ho nájsť nájdením podobných trojuholníkov. Na základe podobností určte pomer výšok trojuholníkov ABM a ABC .

7.3. Využite, že súčet protiľahlých uhlov tetivového štvoruholníka je 180° . Pri rysovaní si zvolte bod A ľubovoľne a pokračujte bodom B .

7.4. Využite, že súčet protiľahlých uhlov tetivového štvoruholníka je 180° .

7.5. Veľkosť uhla CAF získate súčtom $|\angle CAD| + |\angle DAF|$, pričom oba z týchto uhlov viete určiť uhlovými vzťahmi v tetivových štvoruholníkoch. V časti b) dopočítajte vnútorné uhly trojuholníka BEG .

7.6. Označte si niektorý z uhlov a vyjadrite ostatné, čím ukážete, že priamka AE (resp. BF) zvierá s oboma priamkami AB a EF zhodné striedavé uhly.

7.7. Na základe zadáných uhlov využite vhodnú z dvoch uhlových podmienok na dôkaz tetivosti. Potom len využite tvrdenie o obvodových uhloch pre určenie $|\angle PLS|$.

7.8. Nájdite v zadanej konfigurácii tetivový štvoruholník a využite vzťahy medzi uhlami na určenie $|\angle AEB|$. K prvému kroku vám pomôže, že dva uhly majú veľkosť 75° .

7.10. Nájdite vhodnú kružnicu, v tomto prípade budeme poznať aj jej stred. Na základe čoho ju vieme nájsť? Keďže máme zadany pravý uhol, môžeme nájsť tálesovu kružnicu. Zvoľte ju tak, aby ste využili aj rovnaké (lebo kosoštvorec) či polovičné (stred strany) strany v zadaní. Bude si treba aj niečo dokresliť.

7.11. Uhol AIB možno vyjadriť pomocou vnútorných uhlov trojuholníka ABC (pozri úlohu 1.6). Z podmienky, že štyri body majú ležať na kružnici viete zostaviť rovnicu, z ktorej určíte $|\angle BAC|$.

8.1. Označme si S stred strany BC . Ako dlhá je úsečka $|TS|$ (vzhľadom k $|BC|$)? Na základe zhodných dĺžok viete nájsť v obrázku kružnicu, a to nie len takú obyčajnú.

8.2. Označte si uhly a pomocou dopočítania ďalších overte uhlovú podmienku, kedy štyri body ležia na jednej kružnici.

10 Riešenia vybraných úloh

Mnohé z použitých úloh sú prebrané zo súťaží, najmä z Matematickej olympiády a Korešpondenčného matematického seminára. Ich vzorové riešenia možno nájsť v archívoch dostupných na internete. Preto uvádzame riešenia tých úloh, ktoré nie sú takto prístupné.

1.5. Z trojuholníka ABC si dopočítame $\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ - 68^\circ - 40^\circ = 72^\circ$, teda $|\angle BAD| = |\angle DAC| = \alpha/2 = 36^\circ$. Z trojuholníka ABD dostaneme $|\angle BDA| = 180^\circ - 36^\circ - 68^\circ = 76^\circ$. Potom $|\angle ADC| = 180^\circ - 76^\circ = 104^\circ$ (susedné uhly).

1.6. Z trojuholníka BIC dopočítame $|\angle BIC| = 180^\circ - |\angle IBC| - |\angle ICB| = 180^\circ - 34^\circ - 20^\circ = 126^\circ$. Analogicky dopočítame $|\angle AIB| = 110^\circ$ a $|\angle CIA| = 124^\circ$.

1.7. $|\angle BIC| = 180^\circ - \beta/2 - \gamma/2 = 90^\circ + \alpha/2$ a analogicky $|\angle CIA| = 90^\circ + \beta/2$ a $|\angle AIB| = 90^\circ + \gamma/2$.

1.8. Nech $|\angle ACB| = \varphi$. Z rovnoramenného trojuholníka ABC dostávame $|\angle CAB| = \varphi$ a $|\angle ABC| = 180^\circ - 2\varphi$. Vďaka striedavým uhlom máme $|\angle CDE| = 180^\circ - |\angle ABC| = 180^\circ - (180^\circ - 2\varphi) = 2\varphi$. Potom z rovnoramenného trojuholníka CDE dopočítame $|\angle ECD| = (180^\circ - 2\varphi) = 90^\circ - \varphi$. Na záver určíme $|\angle ACE| = 180^\circ - \varphi - (90^\circ - \varphi) = 90^\circ$.

1.9. Štvorec a rovnostranný trojuholník majú všetky strany zhodné, preto $|DA| = |CB| = |AB| = |BE| = |EA|$, preto sú trojuholníky ADE a BCE rovnoramenné. Vieme tak dopočítať uhly $|\angle EAD| = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, $|\angle ADE| = (180^\circ - 30^\circ)/2 = 75^\circ$, $|\angle EDC| = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$. Analogicky $|\angle ECD| = 70^\circ$, preto

$$|\angle CED| = 180^\circ - 15^\circ - 15^\circ = 150^\circ.$$

1.10. Označme $|\angle ABL| = |\angle LBC| = \beta$ (keďže BL je os uhla ABC). Potom $|\angle CLB| = |\angle ABL| = \beta$ (striedavé uhly). Teda $|BC| = |CL|$ a keďže L je stred strany, tak platí aj $|AD| = |BC| = |CL| = |LD|$. Čiže trojuholník ALD je tiež rovnoramenný s $|\angle CDA| = |\angle ABC| = 2\beta$. Preto $|\angle DLA| = (180^\circ - 2\beta)/2 = 90^\circ - \beta$. Dostávame tak, že $|\angle BLA| = 180^\circ - \beta - (90^\circ - \beta) = 90^\circ$, ako sme mali dokázať.

1.12. Nech E je taký vnútorný bod štvorca, pre ktorý je trojuholník ABE rovnostranný. Ako v úlohe 1.9 ukážeme, že $|\angle CED| = 150^\circ$ a $|DE| = |CE|$. Vnútorný bod štvorca s týmito dvomi vlastnosťami je len jeden, preto musí ísť bod X , teda $X = E$. Teda trojuholník ABX je totožný s trojuholníkom ABE , a preto je rovnostranný.

Dávame do pozornosti, že sme využili pokročilejšiu techniku riešenia tejto geometrickej úlohy – zmenili sme to, čo máme dokazovať a dostali sme tak ľahšiu úlohu. Teda namiesto dokazovanie rovnostrannosti trojuholníka ABX sme dokazovali, že iný trojuholník je rovnoramenný s uhlom 150° . Pri takomto riešení si treba dať pozor. Nie každú úlohu možno takto obrátiť. Preto je potrebné vysvetliť, že takéto obrátenie nám naozaj dokazuje to, čo máme dokázať. Najlepšie je zaviesť iné označenia bodov ako v zadaní a dokázať, že tieto body sú totožné (ako sme ukázali, že $E = X$).

1.13. Označme $|\angle BAC| = |\angle ABC| = \alpha$. Z rovnoramenných trojuholníkov ABC a ABD dostaneme $|\angle ACB| = 180^\circ - 2\alpha$ a $|\angle BAD| = 180^\circ - 2\alpha$. Potom z rovnoramenného trojuholníka ACD máme $|\angle CAD| = 180^\circ$. Avšak platí $|\angle BAC| = |\angle BAD| + |\angle CAD|$, teda $\alpha = 2 \cdot (180^\circ - \alpha)$, $5\alpha = 360^\circ$, teda $\alpha = 72^\circ$. Potom $|\angle BAC| = 180^\circ - 2 \cdot 72^\circ = 36^\circ$. Vnútorné uhly trojuholníka ABC teda sú 72° , 72° a 36° .

3.5. Bez ujmy na všeobecnosti uvažujme vrchol A . Os vnútorného uhla delí uhol α na dva uhly veľkosti $\alpha/2$. Vonkajší uhol pri vrchole A je susedný s uhlom α , preto má veľkosť $180^\circ - \alpha$. Jeho os ho teda rozdelí na dva uhly veľkosti $90^\circ - \alpha/2$. Sčítaním uhlov $\alpha/2 + 90^\circ - \alpha/2$ dostaneme pravý uhol, čo je práve skúmaný uhol medzi osou vonkajšieho a osou vnútorného uhla.

3.6. Nech I je priesečník osí o_α , o_β . To znamená, že bod I sa nachádza v oboch uhloch ABC a BCA , preto leží vnútri trojuholníka ABC . Keďže $I \in o_\alpha$, tak bod I je rovnako vzdialený od priamky AB ako od priamky AC . Keďže $I \in o_\beta$, tak vzdialenosť bodu I od polpriamky AB je rovná aj vzdialenosti bodu I od polpriamky BC . Čiže bod I je rovnako vzdialený aj od polpriamok CA a CB , teda $I \in o_\gamma$.

3.7. Dokážeme, že priamky o_α , o'_β a o'_γ sa pretínajú v jednom bode. Nech P je priesečník priamok o'_β a o'_γ . Zdôvodníme, že bod P sa nachádza v polrovine ρ , ktorá je opačná k polrovine BCA (teda $\rho = \overrightarrow{BCA}^+$). Uhol tvorený polpriamkou BC a polpriamkou $o'_\beta \cap \rho$ je $90^\circ - \beta/2$, čiže ostrý. To isté platí aj pre uhol medzi polpriamkami CB a $o'_\gamma \cap \rho$. Preto sa priamky o'_β a o'_γ pretínajú v polrovine ρ . Keďže bod P leží na oboch z nich, tak jeho vzdialenosti od polpriamky $\overrightarrow{BA}^+$, úsečky BC a polpriamky $\overrightarrow{CA}^+$ sú rovnaké. A nakoľko je bod P vnútorným bodom uhla BAC , tak musí ležať na osi o_α .

3.13. Osi vnútorných uhlov vedené od vrcholu po bod I rozdelia trojuholník ABC na tri trojuholníky. Každý má výšku r a ich strany sú postupne a , b , c . Ich obsahy sú teda $\frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a + b + c)r = sr$.

3.14. Trojuholníky AIM a $\triangle AIL$ sú zhodné podľa vety *usu* – majú spoločnú stranu AI a zhodné uhly. Preto $|AM| = |AL|$. Keďže je trojuholník AML rovnoramenný, tak os uhla oproti základni je je na základňu kolmá, teda priamka AI je kolmá na priamku AL .

3.15. Využite, že ak máme dve pretínajúce sa dotýčnice k jednej kružnici, tak vzdialenosti od ich prieniku k bodom dotyku sú rovnaké. Máme teda tri neznáme vzdialenosti, zostavte pre ne sústavu troch rovníc.

$$|AL| = |AM| = \frac{b + c - a}{2}, \quad |BM| = |BK| = \frac{c + a - b}{2}, \quad |CK| = |CL| = \frac{a + b - c}{2}.$$

3.16. Podobne ako v predchádzajúcej úlohe

$$|AL| = |AM| = \frac{a + b + c}{2}, \quad |BM| = |BK| = \frac{a + b - c}{2}, \quad |CK| = |CL| = \frac{a + c - b}{2}.$$

3.17. Nech sa kružnica vpísaná dotýka strany AB v bode G a nech sa kružnica pripísaná k strane BC dotýka priamky AB v bode H . Ďalej označme r polomer kružnice vpísanej a r_A polomer kružnice pripísanej k strane

BC . Trojuholníky AGI a AHI_A sú pravouhlé so spoločným uhlom GAI , preto sú podľa vety *uu* podobné. Z toho vyplýva $|AI| : r = |AI_A| : r_A$. Priamky EI a FI_A obsahujú polomery kružníc, ktoré sa dotýkajú priamky BC , preto sú obe z nich kolmé na priamku BC . Platí teda $EI \parallel FI_A$. Potom $|\sphericalangle AIE| = |\sphericalangle AI_AF|$, keďže ide o súhlasné uhly. Ďalej platí $|AI| : |IE| = |AI| : r = |AI_A| : r_A = |AI_A| : |I_AF|$, takže trojuholníky AIE a AI_AF sú podobné podľa vety *sus*. Z tejto podobnosti dostávame $|\sphericalangle IAE| = |\sphericalangle I_AF| = |\sphericalangle IAF|$. Z toho vyplýva, že body A, E, F ležia na priamke.

Rovnosť $|BD| = |FC|$ vyplýva z riešení úloh 3.14 a 3.15.

Časť a) možno dokázať stručnejšie s využitím rovnoľahlosti. Uvažujme kladnú rovnoľahlosť, ktorá zobrazí vpísanú kružnicu na pripísanú. Je známe, že stred tejto rovnoľahlosti leží na priesečníku spoločných vonkajších dotýčníc, teda priamok AB a AC , čiže ide o bod A . V tejto rovnoľahlosti sa priemer DE kružnice vpísanej zobrazí na priemer kružnice pripísanej rovnobežný s priamkou DE , a to je priemer z bodu F . Preto sa bod E zobrazí na bod F . Z definície rovnoľahlosti potom vyplýva, že body A, E, F (stred, vzor a obraz) ležia na priamke.

4.3. Úsečka ST je strednou pričkou trojuholníka ABC a úsečka VU je strednou pričkou trojuholníka ACD . Preto sú úsečky ST a VU rovnobežné s uhlopriečkou AC , a teda aj rovnobežné navzájom. Analogicky sú rovnobežné aj úsečky VS a TU . Preto je $STUV$ rovnobežník a jeho uhlopriečky, teda úsečky SU a VT , sa rozpolujú.

4.4. Z úlohy 4.3 vieme, že $STUV$ je rovnobežník. Uhlopriečky rovnobežníka, teda úsečky SU a VT , sa navzájom rozpolujú.

5.9. Priesečníky úsečiek AK a AL s uhlopriečkou BD označme postupne X, Y . Ďalej označme S priesečník uhlopriečok rovnobežníka $ABCD$. Pripomeňme, že ide o stred oboch uhlopriečok, teda $|BS| = |SD| = 6$ cm. Úsečka AK je ťažnica v trojuholníku ABC , preto delí ťažnicu BS v pomere $1 : 2$, teda $|BX| = 4$ cm a $|XS| = 2$ cm. Takisto je AL ťažnica v trojuholníku ACD , z čoho máme $|DY| = 4$ cm a $|YS| = 2$ cm. Potom $|XY| = |XS| + |SY| = 4$ cm. Dostali sme tak, že $|BX| = |XY| = |YD| = 4$ cm, teda úsečky AK a AL delia uhlopriečku BD na tri zhodné časti.

Tento záver platí nezávisle na dĺžke uhlopriečky. Riešenie vieme zovšeobecniť napríklad označením $|BD| = u$. Potom $|BS| = |SD| = u/2$, $|BX| = 2/3 \cdot u/2 = u/3$, analogicky $|YD| = u/3$ a $|XY| = u/6 + u/6 = u/3$ (alebo $|XY| = u - u/3 - u/3 = u/3$).

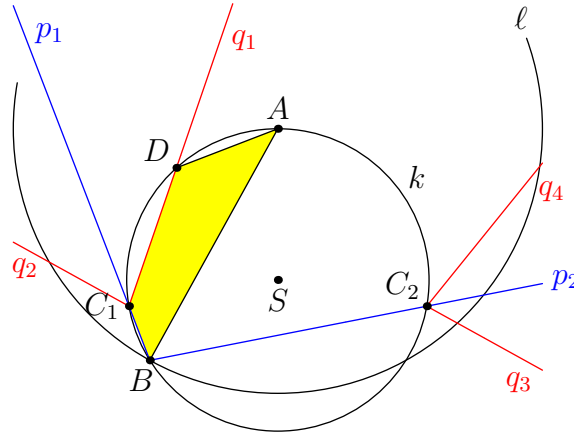
7.1. Vždy tetivové sú a) štvorec, b) obdĺžnik, f) rovnoramenný lichobežník. Každý ľahko overíme zistením, či protiľahlé uhly majú vždy súčet 180° . Dávame do pozornosti, že každý tetivový lichobežník je rovnoramenný.

7.2. Právě uhly nám zaručia tálsové kružnice. Štvorica bodov $\{B, C, P_b, P_c\}$ leží na kružnici – na Tálesovej kružnici nad priemerom BC . Analogicky na kružnici ležia štvorice $\{C, A, P_a, P_b\}$ a $\{A, B, P_a, P_b\}$. Štvorica bodov $\{A, P_c, H, P_b\}$ leží na Tálesovej kružnici nad priemerom AH . Analogicky tvoria tetivové štvoruholníky štvorice $\{B, P_a, H, P_c\}$ a $\{C, P_b, H, P_a\}$. Pokiaľ je trojuholník ABC ostrouhlý, tak uvedené štvorice bodov ležia kružniciach v poradí, v akom sme ich zapísali.

7.3. a) Protiľahlé uhly tetivového štvoruholníka majú súčet 180° , preto $|\sphericalangle CDA| = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$ a $|\sphericalangle DAB| = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$.

b) Narysujeme kružnicu $k(S; 4 \text{ cm})$. Ľubovoľne na nej zvolíme bod A . Bod B je vzdialený 7 cm od bodu A , preto ho nájdeme na priesečníku kružnice k s kružnicou $\ell(A; 7 \text{ cm})$. Aby $|\sphericalangle ABC| = 50^\circ$, tak bod C musí ležať na niektorej polpriamke p s počiatkom v bode B , ktorá zviera s úsečkou BA uhol 50° . Bod $C \neq B$ zvolíme na priesečníku polpriamky p s kružnicou k . Bod D zas musí ležať na polpriamke q s počiatkom v bode C , ktorá zviera s úsečkou CB uhol 140° . Bod $D \neq C$ nájdeme na priesečníku polpriamky q s kružnicou k .

Kružnice k a ℓ majú dva priesečníky. Ďalej pokračujeme len s jedným z nich – pri druhom je celá situácia osovo súmerná podľa priemeru kružnice k prechádzajúceho cez bod A . Takisto priamky p možno narysovať dvomi spôsobmi, v obrázku 6 sme ich označili p_1 a p_2 . Každá z nich nám pretne kružnicu k v jednom bode rôznom od B . Na bod C máme tak dve možnosti. Pre každú z nich máme dve možnosti na narysovanie priamky q , teda celkovo 4, ktoré sme označili q_1, q_2, q_3 a q_4 . Len jedna z nich nám pretne kružnicu k po druhýkrát. Úloha má tak práve jedno riešenie, keďže takto zostrojený štvoruholník ABC_1D spĺňa všetky podmienky zo zadania.



Obr. 6

7.4. S využitím protiľahlých uhlov v zadaných tetivových štvoruholníkoch dostávame $|\angle CDA| = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$ a $|\angle EDC| = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Potom $|\angle ADE| = 360^\circ - 100^\circ - 120^\circ = 140^\circ$.

7.5. a) Z obvodových uhlov v tetivovom štvoruholníku $ABCD$ platí $|\angle CAD| = |\angle CBD| = 30^\circ$. V tetivovom štvoruholníku $ADEF$ zas využijeme protiľahlé uhly, z čoho $|\angle DAF| = 180^\circ - |\angle DEF| = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$. Teda $|\angle CAF| = 30^\circ + 80^\circ = 110^\circ$.

b) Kvôli susedným uhlov platí $|\angle BEG| = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$. V trojuholníku BEG dopočítame zvyšný uhol $|\angle BGE| = 180^\circ - 80^\circ - 30^\circ = 70^\circ$. Tak sme dostali, že $|\angle CGF| + |\angle CAF| = |\angle BGE| + |\angle CAF| = 70^\circ + 110^\circ = 180^\circ$, preto je štvoruholník $ACGF$ tetivový.

7.6. Označme $|\angle BAD| = \alpha$. Potom $|\angle BCD| = 180^\circ - \alpha$ (protiľahlý v tetivovom štvoruholníku), $|\angle FCD| = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha$ (susedný uhol) a $|\angle FED| = 180^\circ - \alpha$. Zvoľme bod X na polpriamke opačnej k EA . Potom $|\angle FEX| = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha$. Priamky AB a EF sú preťaté pričkou AE , ktorá s nimi zvierá zhodné striedavé uhly $|\angle BAE| = |\angle FEX| = \alpha$, preto sú priamky AB a EF rovnobežné.

7.7. a) Áno, lebo $|\angle SUL| + |\angle SPL| = |\angle PUS| + |\angle PUL| + 110^\circ = 50^\circ + 20^\circ + 110^\circ = 180^\circ$.

b) Keďže štvoruholník $PLUS$ je tetivový, tak z obvodových uhlov dostávame $|\angle PLS| = |\angle PUS| = 50^\circ$.

7.8. Zo susedných uhlov máme $|\angle BED| = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$, teda $|\angle BED| + |\angle BAD| = 180^\circ$. Preto je štvoruholník $BEDA$ tetivový. Vieme tak využiť jeho obvodové uhly $|\angle AED| = |\angle ABD| = \beta/2 = 20^\circ$. Potom už len dopočítame $|\angle AEB| = 105^\circ - 20^\circ = 85^\circ$.

7.9. Zo susedných uhlov máme $|\angle DBE| = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$. Potom z rovnoramenného trojuholníka DEB dostaneme $|\angle BDE| = |\angle BED| = (180^\circ - 100^\circ)/2 = 40^\circ$. Využitím obvodových uhlov v štvoruholníku $BEFD$ určíme $|\angle BFE| = |\angle BDE| = 40^\circ$ a $|\angle BFD| = |\angle BED| = 40^\circ$. Keďže $|\angle BFA| = |\angle BCA| = 40^\circ$ a bod F leží v polrovine ABC , tak je štvoruholník $ABFC$ tetivový.

8.1. Nech S je stred strany BC . Kvôli deliacemu pomeru ťažníc platí $|TS| = \frac{1}{2}|BC| = |BS| = |SC|$. Preto body B, C, T ležia na kružnici so stredom v bode S . Keďže S leží na úsečke BC , tak ide o Tálesovu kružnicu na priemerom BC . Preto je uhol BTC pravý.

Literatúra

- [1] Korešpondenčný matematický seminár (KMS). Archív úloh. Online. Online archív zadaní a materiálov KMS.
- [2] Z. Kubáček and J. Žabka. *Seminár z matematiky 3*. MAPA Slovakia Plus, s.r.o., 2020.
- [3] Slovenská komisia matematickej olympiády. Archív úloh. Online. Online archív zadaní Matematickej olympiády.