

Geometria trojuholníka

Jozef Rajník

1 Počítanie uhlov

Úloha 1. V trojuholníku ABC sa osi všetkých jeho troch uhlov pretínajú v bode I . Vypočítajte veľkosti uhlov BIC , CIA a AIB , ak $a = 5$ cm, $\beta = 68^\circ$, $\gamma = 40^\circ$.

Úloha 2. Viete vyriešiť predošlú úlohu pre všeobecný trojuholník? Teda vyjadriť výsledok v závislosti na stranách a veľkosti uhlov trojuholníka ABC .

Úloha 3. Máme daný trojuholník ABC . Na strane AB zvolíme bod P tak, aby bol uhol APC pravý. Podobne na strane AC zvolíme bod Q tak, aby uhol AQB bol pravý. Priesečník úsečiek PC a QB označíme H . Vypočítajte veľkosť uhla PHB , ak $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 70^\circ$ a $c = 6$ cm.

Úloha 4. Máme daný trojuholník ABC . Na strane AB zvolíme bod P tak, aby bol uhol APC pravý. Podobne na strane AC zvolíme bod Q tak, aby uhol AQB bol pravý. Priesečník úsečiek PC a QB označíme H . Dokážte, že uhly PHB a BAC majú rovnakú veľkosť.

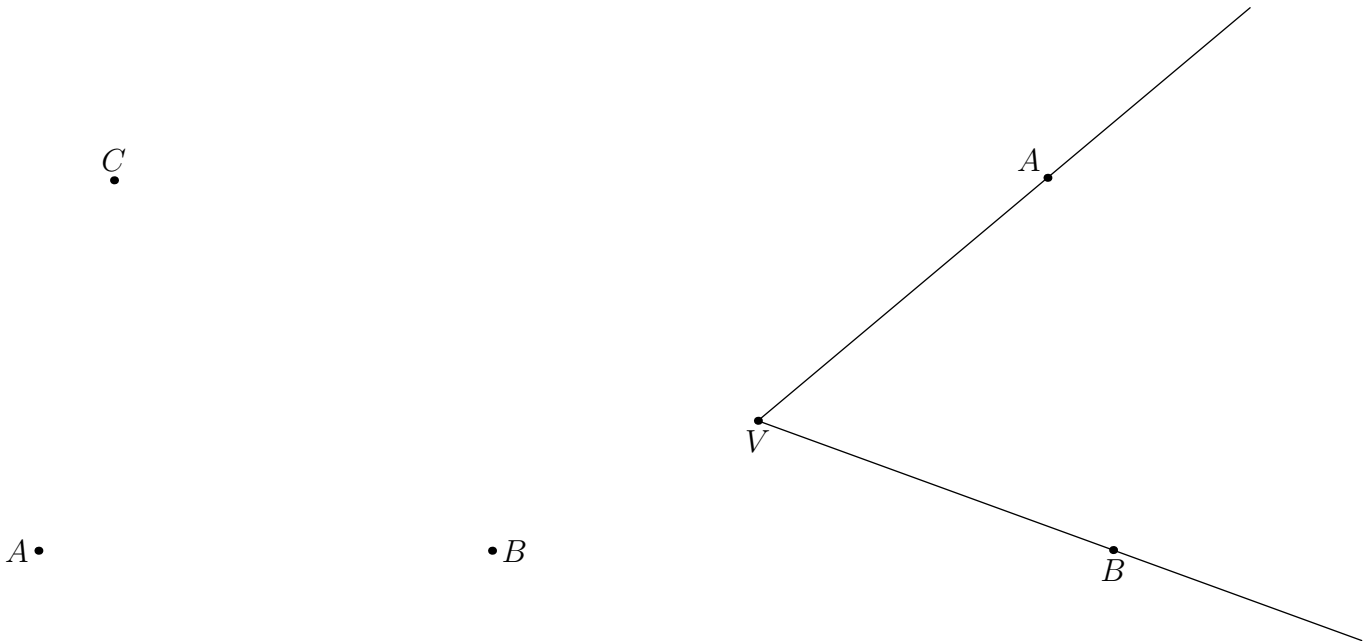
Úloha 5. Rovnoramenné trojuholníky ABV a ACV so základňami AB a AC zdieľajú rameno VA a žiadny iný bod. Vieme, že $|\angle BAV| = 40^\circ$ a $|\angle CAV| = 20^\circ$. Vypočítajte veľkosť konvexného uhla BVC .

Úloha 6. Máme daný trojuholník ABC , v ktorom bod S je stredom strany AB . Vieme, že platí $|AB| = 6$ cm, $|CS| = 3$ cm a $|\angle CAB| = 40^\circ$. Vypočítajte veľkosť uhla ACB .

Úloha 7. Ako sa zmení riešenie predošlej úlohy, ak zmeníme veľkosť uhla BAC ?

2 Prvky trojuholníka

Úloha 8. Traja kamaráti Albert, Betka a Cecília bývajú v bodoch A , B , C tak, že $|AB| = 6$ km, $|BC| = 7$ km a $|CA| = 5$ km. V bode X si chcú postaviť víkendovú chatu. Cecília ju chce mať 3 km od svojho domu. Albertovi a Betke na tom až tak nezáleží. Dôležité je, aby ju mali obaja rovnako ďaleko. Kde všade možno postaviť chatu? Zostrojte všetky takéto body X .



Úloha 9. Z bodu V vychádzajú dve diaľnice – polpriamky VA a VB , ktoré zvierajú uhol 60° . Body A , B sa nachádzajú 5 km od bodu V . Pán Tajomný vám prezradil, že býva 6 km od bodu A tak, že jeho vzdialenosť k oboch diaľnicám je rovnaká. Kde všade môže bývať pán Tajomný? Zostrojte všetky takéto body.

Úloha 10. Možno chatu z úlohy 8 postaviť spravodlivo, teda aby každý k nej mal rovnako ďaleko? Ak áno, tak ako nájdete jej polohu?

Úloha 11. V Kocúrkove sú tri diaľnice tvorené priamkami AB , BC a CA , ktorých priesečníky A , B , C sú navzájom rôzne body. Opíšte postup konštrukcie, ako nájsť všetky body P , v ktorých možno postaviť budovu diaľničnej polície tak, aby bola rovnako vzdialená od všetkých troch diaľnic.

Úloha 12. Máme daný trojuholník, ABC so stranami $a = 5,1$ cm, $b = 6,9$ cm a $c = 7,8$ cm. Na strane CA zvolíme bod X tak, aby platilo $|XA| = 2|XC|$. Podobne na strane CB zvolíme bod Y tak, aby platilo $|YB| = 2|YC|$. Priesečník úsečiek XB a YA označíme P . Ďalej vieme, že platí $|XB| = 5,2$ cm a $|YA| = 6,8$ cm. Určte dĺžky úsečiek

- a) XY , b) XP , c) BP .

Úloha 13. V trojuholníku ABC je bod S_c stredom strany AB a bod S_b je stred strany AC . Úsečky BS_b a CS_c sa pretínajú v bode P . Vieme, že $|BC| = 8$, $|BT| = 6$ a $|CS| = 9$. Určte dĺžky

- a) $|S_bS_c|$, b) $|S_bP|$, c) $|PB|$.

Úloha 14. V predošlej úlohe označíme priesečník úsečiek AS_a a BS_b ako Q . Určte $|S_bQ|$.

Úloha 15. Dokážte, že úsečky AS_a , BS_b a CS_c sa pretínajú v jednom bode bez ohľadu na rozmery trojuholníka ABC (S_a , S_b , S_c značia postupne stredy strán a , b , c ako v predošlých úlohách).

Úloha 16. V štvoruholníku $ABCD$ označíme S , T , U , V postupne stredy strán AB , BC , CD , DA . Dokážte, štvoruholník $STUV$ je rovnobežník.

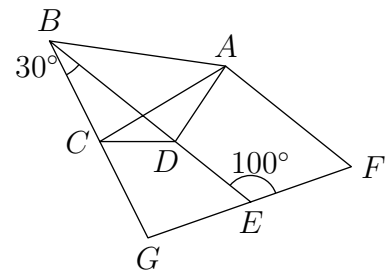
Úloha 17. Nech $ABCD$ je rovnobežník, K je stred strany BC a L je stred strany CD . V akom pomere rozdeľujú priamky AK a AL uhlopriečku BD ?

Úloha 18. V trojuholníku ABC platí $|AT| = |BC|$. Dokážte, že $|\angle BTC| = 90^\circ$.

Úloha 19 (MO68 C-I-2). Nech ABC je trojuholník a D a E sú body strany AB také, že $|AD| = |DE| = |EB|$. Nech F a G sú obrazy bodu C podľa stredov A , resp. B . Nech I je priesečník priamok CD a BF a J priesečník CE a AG . Dokážte, že priesečník priamok AI a BJ leží na priamke FG .

3 Tetivové štvoruholníky

Úloha 20. Máme dané tetivové štvoruholníky $ABCD$ a $ADEF$ ako na obrázku. Body B , D , E ležia na priamke a bod G je priesečníkom priamok BC a EF . Vieme, že $|\angle CBD| = 30^\circ$ a $|\angle DEF| = 100^\circ$. (Rozmery na obrázku sú len približné.)



a) Určte $|\angle CAF|$.

b) Dokážte, že štvoruholník $ACGF$ je tetivový.

Úloha 21. V trojuholníku ABC platí $\alpha = 75^\circ$ a $\beta = 40^\circ$. Os uhla ABC pretína stranu AC v bode D . Na strane BC je zvolený bod E tak, že platí $|\angle CED| = 75^\circ$. Určte $|\angle AEB|$.

4 Mix úloh na precvičenie

Úloha 22 (MO75 C-I-5 N2). V trojuholníku ABC označíme D priesečník osi vnútorného uhla pri vrchole A so stranou BC . Na strane AB nájdeme taký bod M , že $MD \parallel AC$. Dokážte, že úsečky AM a DM majú rovnakú dĺžku.

Úloha 23 (KMS 19/20-Z2-1). Majme rovnoramenný trojuholník ABC , v ktorom $|AB| = |AC|$. Bodom A vedme priamku p rovnobežnú so stranou BC . Kružnica so stredom v bode A , ktorá prechádza bodom C , pretína priamku p v bode D takom, že uhol CAD je ostrý. Dokážte, že bod D leží na osi uhla ABC .

Úloha 24 (MO73 C-S-2). Nech $ABCD$ je lichobežník so základňami AB a CD . Nech sa osi uhlov CDA a DAB pretínajú na úsečke AB . Dokážte, že $|AD| + |BC| = |AB|$.

Úloha 25 (MO72 C-S-2). Nech ABC je pravouhlý trojuholník, K stred prepony AB a L stred kratšej odvesny AC . Nech P je priesečník úsečky KL a kružnice s priemerom BC . Dokážte, že uhly PAC a PBC sú zhodné.

Úloha 26 (MO74 B-S-2). Nech ABC je pravouhlý rovnoramenný trojuholník s preponou BC a D je jeho vnútorný bod taký, že priamky AD a BD sú na seba kolmé. Nech E a F sú body polroviny opačnej k polrovine ADB také, že $ADEF$ je štvorec. Dokážte, že priamka EF prechádza bodom C .

Úloha 27 (MO72 B-I-6). Nech ABC je trojuholník s pravým uhlom ABC I je stred do neho vpísanej kružnice, M stred prepony AC a X priesečník priamky IM s priamkou BC . Nech body B , I , M , C ležia na jednej kružnici. Dokážte, že trojuholník ABX je rovnoramenný.