

Matematická indukcia

Úloha 1. V rade máme n žiaroviek. Na začiatku prvej minúty sú všetky zhasnuté. Po každej minúte buď zapneme práve jednu vypnutú žiarovku, alebo vypneme práve jednu zapnutú žiarovku. Uvedomte si, že všetkých možností, ako môžu žiarovky svietiť, je 2^n .

Dokážte, že vieme tieto ťahy voliť tak, aby sme počas 2^n minút dostali každú z týchto možností rozsvietenia žiaroviek práve raz.

Ide o komplexnejšiu úlohu. V tejto úlohe sa objavuje prirodzené číslo n . To nám dáva istú výhodu – môžeme ju začať riešiť najprv pre malé hodnoty n . Najskôr sa však zamyslíme nad tým, ako si vieme túto situáciu predstaviť. Jednoduchý spôsob je jedným symbolom vyjadriť zhasnutú žiarovku, napr. 0 a iným zasvietenú, napr. X (iné možnosti sú napr. 0 a 1 alebo o a ●). Jeden konkrétny stav si vieme teda vyjadriť napr. ako X000XX0X.

Keď máme vybraný spôsob reprezentácie stavu, tak si môžeme rozmyslieť, koľko všetkých stavov žiaroviek môžeme mať. Pre každú z n žiaroviek máme 2 možnosti (svieti alebo nesvieti). Celkovo tak máme $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^n$ možných stavov.

Podme sa teda pustiť do dokazovania. Pre $n = 1$ máme dva stavy 0 a X. Máme ukázať, že každý z týchto stavov vieme dosiahnuť dovoľenými operáciami. Ako toto dokážeme? Keďže dokazujeme, že niečo *vieme* spraviť, tak nám na to stačí príklad. A ten je jednoduchý – po prvej minúte zažneme žiarovku. Tento príklad vieme vyjadriť aj nasledovne:

0
X

Tu vieme vidieť, ako môžu vyzeráť dôkazy pre konkrétne n – stačí nám uviesť konkrétnu postupnosť stavov žiaroviek. Pre $n = 2$ tak môžeme nájsť nasledovné postupnosti (dokonca sú jediné):

00	00
0X	X0
XX	XX
X0	0X

Pre $n = 3$ zas takého:

000	000
X00	X00
XX0	XX0
XXX	0X0
X0X	0XX
00X	00X
0XX	X0X
0X0	XXX

Teraz sme už neuviedli všetky, ale nič principiálne iné neexistuje. (Dá sa ukázať, že všetky ostatné sa dajú získať preusporiadaním stĺpcov.)

Takto by sme vedeli pokračovať aj ďalej. No týmto spôsobom vieme tvrdenie dokázať len pre konkrétne hodnoty n . Pre vysoké hodnoty n by takýto výpis bol aj veľmi dlhý. No hlavný problém je, že my potrebujeme toto tvrdenie dokázať všeobecne pre všetky prirodzené n . Skúsme teda nájsť nejaký systém, všeobecné pozorovania, ktorým vieme opísať, ako by takáto postupnosť stavov vyzerala všeobecne.

Pekný systém vieme nájsť na postupnosti vpravo. Vieme ju totiž opísať nasledovne.

postupnosť pre $n = 2$

000
X00
XX0
OX0
0XX
XXX
XOX
00X

obrátená postupnosť pre $n = 2$

A túto myšlienku vieme aj pekne zovšeobecniť: Vždy keď ideme tvoriť postupnosť zažínania žiaroviek, tak si najprv vezmeme všetky žiarovku okrem poslednej a aplikujeme na nich ich postupnosť. Potom zažneme poslednú žiarovku a postupnosť dokončíme opakovaním tých istých ťahov na zvyšných žiarovkách len v opačnom poradí. Takto vieme nájsť postupnosť pre každé kladné celé číslo n .

Keď si to zhrnieme, tak čo z tohto riešenia je podstatné? Ide o dve veci:

- Ukážka postupnosti pre $n = 1$.
- Dôkaz, že pokiaľ vieme prepínať nejaký počet žiaroviek, tak vieme prepínať aj o 1 väčší počet žiaroviek.

Rozmyslite si, že z týchto dvoch tvrdení vyplýva to, čo sme mali dokázať. Tomuto princípu dokazovania sa hovorí *princíp matematickej indukcie*.

V tomto prípade dokazujeme tvrdenie $\forall n \in \mathbb{N}^+ : v(n)$, kde výroková forma $v(n)$ znamená: „Nech máme v rade n žiaroviek. Na začiatku prvej minúty sú všetky zhasnuté. Po každej minúte buď zapneme práve jednu vypnutú žiarovku, alebo vypneme práve jednu zapnutú žiarovku. Potom tieto ťahy vieme voliť tak, aby sme počas 2^n minút dostali každú z 2^n možností rozsvietenia žiaroviek práve raz.“ Ak zamlčíme, niektoré veci, tak Skrátené vieme $v(n)$ vyjadriť aj ako: „ n zhasnutých žiaroviek vieme prepínať 2^n minút bez opakovania stavov.“

Riešenie

Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou.

Báza. Pre $n = 1$ máme jednu vypnutú žiarovku, ktorú zapneme, čím dosiahneme všetky dva stavy.

Indukčný krok. Nech $k \in \mathbb{N}^+$. Predpokladajme, že k zhasnutých žiaroviek vieme prepínať 2^k minút bez opakovania stavov (IP). Teraz dokážme, že $k + 1$ zhasnutých žiaroviek vieme prepínať 2^{k+1} minút bez opakovania stavov. To spravíme nasledovne:

1. Prvých 2^k minút budeme prepínať prvých k žiaroviek podľa IP. Takto dostaneme všetky stavy, kde žiarovka $k + 1$ je zhasnutá.
2. Po (2^k) -tej minúte prepneme žiarovku $k + 1$.
3. Zvyšných 2^k minút budeme robiť prepnutia z IP, ale v opačnom poradí. Takto dostaneme všetky stavy, kde žiarovka $k + 1$ svieti.

Opísali sme tak postup, v ktorom medzi každými dvomi minútami prepneme práve jednu žiarovku. Taktiež sme zdôvodnili, že týmto postupom dostaneme všetky stavy žiaroviek (najprv tie s vypnutou žiarovkou $k + 1$, potom zo zapnutou). Týmto sme dokázali, čo sme chceli.