

## Cvičenie 6: Karteziánsky súčin a relácie

→ **Úloha 1.** Ktoré z nasledovných možností korektne definujú usporiadanú dvojicu  $(a, b)$ ?

- a)  $\{a, b\}$
- b)  $\{a, a, b\}$
- c)  $\{a, \{b\}\}$
- d)  $\{\{a\}, \{b\}\}$
- e)  $\{a, \{a, b\}\}$
- f)  $\{\{a\}, \{a, b\}\}$

**Úloha 2.** Definujte usporiadanú trojicu  $(a, b, c)$ .

→ **Úloha 3.** Dokážte, že pre ľubovoľné množiny  $A, B, C$  platia identity:

- a)  $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ ,
- b)  $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ ,
- c)  $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$ .

**Úloha 4.** Nech  $A, B, C$  sú množiny.

- a) Dokážte, že ak  $A \subseteq B$ , tak  $A \times C \subseteq B \times C$ .
- b) Ako sa zmenení výsledok z a), ak namiesto  $\subseteq$  píšeme  $\subsetneq$ ?
- c) Platí aj opačná implikácia?

**Úloha 5.** Dokážte, že množiny  $A$  a  $B$  sú disjunktné práve vtedy, keď  $(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$ .

→ **Úloha 6.** Majme reláciu  $M$  z množiny  $\{a, b, c, d\}$  do množiny  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  a reláciu  $N$  na množine  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , ktoré máme zadané nasledovne:

$$M = \{(a, 2), (a, 5), (b, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 5)\},$$
$$N = \{(1, 1), (1, 3), (1, 2), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 5)\}.$$

Ako vieme tieto relácie znázorniť? Vypíšte relácie  $M^{-1}$ ,  $N^{-1}$ ,  $MN$  a  $NM$  (ak existujú).

→ **Úloha 7.** Na množine  $L$  všetkých ľudí, ktorá má rozklad  $\{M, Z\}$  na mužov a ženy, definujeme relácie:

- $D: aDb \Leftrightarrow a$  je dieťaťom  $b$ ,
- $S: aSb \Leftrightarrow a$  je zosobášený(-ná) s  $b$ .

Pomocou relácií  $D, S$ , operácií na reláciách a množinových operácií definujte relácie:

- a) je rodičom,  $\leftarrow$
- b) je matkou,  $\leftarrow$
- c) je dedkom,  $\leftarrow$
- d) je súrodencom,
- e) je bratom,
- f) je svokrou,  $\leftarrow$
- g) je ujom,
- h) je sesternicou,
- i) je predkom,
- j) je príbuzným.

→ **Úloha 8.** Nech  $D$  a  $E$  sú relácie medzi prvkami množín  $A$  a  $B$ . Dokážte, že  $(D \cap E)^{-1} = D^{-1} \cap E^{-1}$ .

→ **Úloha 9.** Nech  $D$  je relácia medzi prvkami množín  $A$  a  $B$  a nech  $E$  je relácia medzi prvkami množín  $B$  a  $C$ . Dokážte, že potom  $(DE)^{-1} = E^{-1}D^{-1}$ .

**Úloha 10.** Nech  $R, R_1, R_2$  sú binárne relácie z  $A$  do  $B$  a  $S, S_1, S_2$  binárne relácie z  $B$  do  $C$ . Rozhodnite, či vo všeobecnosti platia nasledovné tvrdenia:

- a)  $R(S_1 \cap S_2) = RS_1 \cap RS_2$   
b)  $(R_1 \cap R_2)S = R_1S \cap R_2S$   
c)  $R(S_1 \cup S_2) = RS_1 \cup RS_2$   
d)  $(R_1 \cup R_2)S = R_1S \cup R_2S$   
e) ak  $S_1 \subseteq S_2$ , tak potom  $RS_1 \subseteq RS_2$   
f) ak  $R_1 \subseteq R_2$ , tak potom  $R_1S \subseteq R_2S$   
g)  $R(S_1 - S_2) = RS_1 - RS_2$   
h)  $(R_1 - R_2)S = R_1S - R_2S$

V prípade, že v niektorom prípade neplatí rovnosť, platí aspoň jedna inklúzia? Platia v c) a d) obrátené implikácie? (Riešenie úlohy si môžete pozrieť v skriptách Olejár, Škoviera na strane 70 (77 v pdf), Veta 4.3).