

Cvičenie 9: usporiadania

Úloha 1. Pri každú z nasledovných relácií určte, či je reflexívna, antisymetrická, tranzitívna, dichotomická. Určte, či sú usporiadaním, resp. úplným usporiadaním. Ak áno, určte ich minimálne, maximálne, najmenšie a najväčšie prvky.

- a) \emptyset (na množine M)
- b) $M \times M$ (na množine M)
- c) Relácia $|$ na \mathbb{Z} , kde $a | b \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(ka = b)$ pre všetky $a, b \in \mathbb{Z}$
- d) Relácia $|$ na $\mathbb{N} - \{1\}$, kde $a | b \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(ka = b)$ pre všetky $a, b \in \mathbb{N}$
- e) $S_1 = \{((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2; a + b \leq c + d\}$
- f) $S_2 = \{((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2; a + b < c + d\}$
- g) $S_3 = \{((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2; a + b < c + d \vee (a, b) = (c, d)\}$
- h) $R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; 7a | b \vee a = b\}$
- i) $R = \{(A, B) \in \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M); A \subseteq B\}$
- j) $\preceq = \{((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2; (\exists k \in \mathbb{N})(c = ka \wedge d = kb)\}$ [Riešenie]

→ **Úloha 2.** Nájdite príklad usporiadaní R a S na rovnakej množine M , aby relácie

- a) $R \cap S$, b) $R \cup S$, c) $R - S$, d) RS , e) R^{-1} ?

boli / neboli usporiadania. V prípade, že taká voľba R, S neexistuje, dokažte to.

Úloha 3. Nech $A, I \neq \emptyset$ sú množiny a nech pre každé $i \in I$ je φ_i usporiadanie množiny A . Dokažte, že potom aj $\bigcap_{i \in I} \varphi_i$ je usporiadanie množiny A . Čo ak sú φ_i úplné usporiadania?

Poznámka. $\bigcap_{i \in I} \varphi_i = \{x; (\forall i \in I)(x \in \varphi_i)\}$

Úloha 4. (*) Nech φ, τ sú dva rozklady na množine $X \neq \emptyset$. Hovoríme, že $\varphi \leq \tau$ (alebo, že rozklad φ je menší alebo rovný ako τ), ak ku každej množine $M \in \varphi$ existuje taká množina $P \in \tau$, že $M \subseteq P$. Dokažte, že \leq je usporiadanie systému všetkých rozkladov množiny M .

→ **Úloha 5.** Pre zadané nezáporné celé čísla m, n nájdite usporiadanú množinu, ktorá bude mať n maximálnych a m minimálnych prvkov.

Úloha 6. Možno na množine \mathbb{N}^2 definovať úplné usporiadanie?

Úloha 7. Nech M je množina takých podmnožín množiny $\{1, 2, \dots, 20\}$, ktoré obsahujú len po dvoch nesúdeliteľné čísla, teda

$$M = \{X \in \mathcal{P}(\{1, 2, \dots, 20\}); (\forall a, b \in X)(a \neq b \Rightarrow \text{NSD}(a, b) = 1)\}.$$

Dokažte, že \subseteq je usporiadaním na množine M . Nech A, B sú dva maximálne prvky. Musí nutne platiť, že $|A| = |B|$, teda, že A a B majú rovnaký počet prvkov?

Úloha 8. Pre neprázdnu množinu $A \subseteq \mathbb{N}$ označuje $\max A$ najväčší prvok množiny A (vzhľadom na klasické usporiadanie \leq). Nech $M = \{n \in \mathbb{N}; 0 \leq n \leq 47\}$ a nech

$$R = \{(A, B) \in (\mathcal{P}(M) - \{\emptyset\}) \times (\mathcal{P}(M) - \{\emptyset\}); \max A < \max B \vee A = B\}.$$

Dokažte, že R je usporiadaním na množine $\mathcal{P}(M) - \{\emptyset\}$ a nájdite všetky jej minimálne, najmenšie, maximálne a najväčšie prvky. Správnosť vašich nájdených prvkov dokažte.