1. sada domácich úloh

Termín odovzdania: **pondelok 3. 11. 2025, 23:59**

Úloha 1

(1,5 boda) Rozhodnite, či zložený výrok

$$[(a \wedge \neg b) \vee (c \wedge (d \Rightarrow e))] \Rightarrow [c \vee ((b \vee \neg e) \wedge a) \vee (a \wedge e)]$$

je tautológia. Vaše tvrdenie dokážte.

Dôkaz sporom

Sporom. Nech je výrok nepravdivý. Z toho dostávame (1) a (2):

(1) $(a \wedge \neg b) \vee (c \wedge (d \Rightarrow e)) \Leftrightarrow 1$,

(2) $c \vee ((b \vee \neg e) \wedge a) \vee (a \wedge e) \Leftrightarrow 0$, z čoho dostávame
   - (2a) $c \Leftrightarrow 0$,
   - (2b) $((b \vee \neg e) \wedge a) \Leftrightarrow 0$,
   - (2c) $(a \wedge e) \Leftrightarrow 0$.

(3) Vďaka (2a) platí $(c \wedge (d \Rightarrow e)) \Leftrightarrow 0$, preto aby platilo (1), musí $(a \wedge \neg b) \Leftrightarrow 1$, teda:
   - (3a) $a \Leftrightarrow 1$,
   - (3b) $b \Leftrightarrow 0$.

(4) $(b \vee \neg e) \Leftrightarrow 0$ lebo (2b) a (3a), preto:
   - (4a) $b \Leftrightarrow 0$,
   - (4b) $e \Leftrightarrow 1$.

(5) $e \Leftrightarrow 0$, lebo (2c) a (3a) – a to je spor so (4b).

Dôkaz priamo

Nech platí $(a \wedge \neg b) \vee (c \wedge (d \Rightarrow e))$. Chceme dokázať, že platí $c \vee ((b \vee \neg e) \wedge a) \vee (a \wedge e)$, čo si označíme r. Dôkaz rozdelíme na dva prípady.

1. Ak platí $(a \wedge \neg b)$, tak $a \Leftrightarrow 1$ a $b \Leftrightarrow 0$. Ďalej rozlíšime:
   - (a) Ak $e \Leftrightarrow 1$, tak platí $a \wedge e$, a teda aj celá disjunkcia na pravej strane implikácie.
   - (b) Ak $e \Leftrightarrow 0$, tak platí $\neg e$, teda aj $(b \vee \neg e)$ a $(b \vee \neg e) \wedge a$. Opäť máme, že platí celá pravá strana.
2. Ak platí $(c \wedge (d \Rightarrow e))$, tak platí c, a teda aj celá pravá strana implikácie.

Komentár

Úloha sa dala zjednodušiť aj tým, že pravú stranu s využitím distributívneho zákona a iných základných tautológií ekvivalentne upravíme na je $c \vee a$.

Úloha 2

Nech A je podmnožina prirodzených čísel. *Supermnožinou* množiny A nazveme množinu všetkých nadmnožín množiny A v univerze prirodzených čísel. Budeme ju označovať $\mathcal{S}(A)$. Teda

$$\mathcal{S}(A) = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid A \subseteq X\}.$$

Zistite, či pre ľubovoľné množiny A, B platí:

a) $\mathcal{S}(A \cup B) = \mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(B)$,

b) $\mathcal{S}(A \cup B) = \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B)$.

Vaše tvrdenia dokážte. Pre získanie plného počtu bodov nesmiete bez dôkazu využiť tvrdenia o množinách, všetky využité tvrdenia dokážte z definícií.

a) neplatí

Nech $A = \{1\}$ a $B = \{2\}$. Potom

- $A \subseteq \{1\}$, preto $\{1\} \in \mathcal{S}(A)$, teda aj $\{1\} \in \mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(B)$.
- $A \cup B = \{1, 2\} \not\subseteq \{1\}$, preto $\{1\} \notin \mathcal{S}(A \cup B)$.

Preto $\mathcal{S}(A \cup B) \neq \mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(B)$ (lebo sme našli prvok $\{1\}$, ktorý je v množine na pravej strane a nie je v množine na ľavej strane).

a) iný protipríklad

Nech $A = \mathbb{N}$ a $B = \mathbb{N} - \{0\}$. Potom

- $\mathcal{S}(A \cup B) = \mathcal{S}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$,
- $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$,
- $\mathcal{S}(B) = \mathcal{S}(\mathbb{N} - \{0\}) = \{\mathbb{N} - \{0\}, \mathbb{N}\}$,
- $\mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(B) = \{\mathbb{N} - \{0\}, \mathbb{N}\}$.

Avšak $\mathcal{S}(A \cup B) = \mathbb{N} \neq \{\mathbb{N} - \{0\}, \mathbb{N}\} = \mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(B)$.

b) platí

Ukážeme, že $\mathcal{S}(A \cup B) = \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B)$

„$\subseteq$“: Nech $X \in \mathcal{S}(A \cup B)$. Z toho postupne vyplýva:

(1) $A \cup B \subseteq X$

(2) $A \subseteq X$, lebo pre každé y platí: $y \in A \Rightarrow y \in A \vee y \in B \Rightarrow y \in A \cup B \overset{(1)}{\Rightarrow} y \in X$

(3) $B \subseteq X$ analogicky (dôkaz vyzerá tatko: $y \in B \Rightarrow y \in A \vee y \in B \Rightarrow y \in A \cup B \overset{(1)}{\Rightarrow} y \in X$)

(4) $A \subseteq X \wedge B \subseteq X$

(5) $X \in \mathcal{S}(A) \wedge X \in \mathcal{S}(B)$

(6) $X \in \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B)$

„$\supseteq$“: Nech $X \in \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B)$. Z toho postupne vyplýva:

(1) $X \in \mathcal{S}(A) \wedge X \in \mathcal{S}(B)$

(2) $A \subseteq X \wedge B \subseteq X$

(3) $A \cup B \subseteq X$, lebo pre každé y platí: $y \in A \cup B \Rightarrow y \in A \vee y \in B$, čo ďalej rozdelíme na dva prípady:
   - ak $y \in A$, tak z $A \subseteq X$ (2) dostávame $y \in X$,
   - ak $y \in B$, tak z $B \subseteq X$ (2) dostávame $y \in X$. V oboch prípadoch platí $y \in X$, čím sme dokončili dôkaz $A \cup B \subseteq X$.

(4) $X \in \mathcal{S}(A \cup B)$

Riešenie cez ekvivalentné úpravy a kvantifikátory

Pre každé X platí:

$$
\begin{aligned}
& X \in \mathcal{S}(A \cup B) \\
& \qquad \Updownarrow \text{ (definícia supermnožiny)} \\
& A \cup B \subseteq X \\
& \qquad \Updownarrow \text{ (definícia podmnožiny)} \\
& \forall y\colon (y \in A \cup B \Rightarrow y \in X) \\
& \qquad \Updownarrow \text{ (prepísanie implikácie (tautológia } (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q))) \\
& \forall y\colon (\neg(y \in A \vee y \in B) \vee y \in X) \\
& \qquad \Updownarrow \text{ (De Morganov zákon)} \\
& \forall y\colon ((y \notin A \wedge y \notin B) \vee y \in X) \\
& \qquad \Updownarrow \text{ (distributívny zákon)} \\
& \forall y\colon ((y \notin A \vee y \in X) \wedge (y \notin B \vee y \in X)) \\
& \qquad \Updownarrow \text{ (prepísanie implikácií)} \\
& \forall y\colon ((y \in A \Rightarrow y \in X) \wedge (y \in B \Rightarrow y \in X)) \\
& \qquad \Updownarrow \text{ (*)} \\
& \forall y\colon (y \in A \Rightarrow y \in X) \wedge \forall y\colon (y \in B \Rightarrow y \in X) \\
& \qquad \Updownarrow \text{ (definícia podmnožiny)} \\
& A \subseteq X \wedge B \subseteq X \\
& \qquad \Updownarrow \text{ (definícia supermnožiny)} \\
& X \in \mathcal{S}(A) \wedge X \in \mathcal{S}(B) \\
& \qquad \Updownarrow \text{ (definícia prieniku)} \\
& X \in \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B)
\end{aligned}
$$

Poznámky v zátvorkách nie sú potrebné. Potrebné je vysvetliť najmä krok (*). Využili sme tautológiu

$$\forall x\colon (a(x) \wedge b(x)) \Leftrightarrow (\forall x\colon a(x) \wedge \forall x\colon b(x))$$

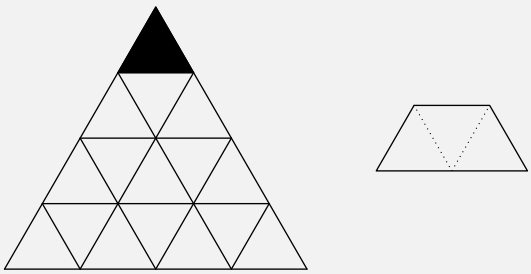
z cvičení 2, úloha 12c). Keďže sa však nemôžeme odvolávať na cvičenia a danú tautológiu som nenašiel v skriptách, tak by sme ju mali ešte dokázať.

Ak platí $\forall x\colon (a(x) \wedge b(x))$, tak pre každé x platí $a(x) \wedge b(x)$, teda $a(x)$. Takto sme dokázali $\forall x\colon a(x)$. Analogicky dokážeme aj $\forall x\colon b(x)$, teda platí aj ich konjunkcia.

Ak platí $\forall x\colon a(x) \wedge \forall x\colon b(x)$, tak pre každé x platí $a(x)$ (z prvého člena konjunkcie) a aj $b(x)$ (z druhého člena konjunkcie), teda platí $\forall x\colon (a(x) \wedge b(x))$.

Úloha 3

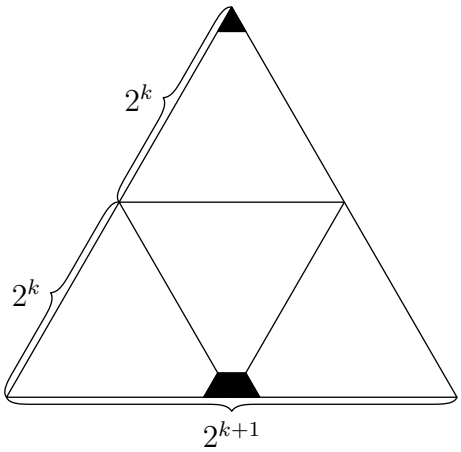
Pre celé číslo $n \geq 1$ uvažujeme rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky 2^n, ktorý je rozdelený na sieť rovnostranných trojuholníkov so stranou dĺžky 1, ktoré skrátene voláme *jednotkové trojuholníky*. Jeden rohový jednotkový trojuholník je zafarbený načierno. Na obrázku je znázornená takáto sieť pre $n = 2$. K dispozícii máme dlaždice tvaru rovnoramenného lichobežníka tvorené tromi jednotkovými trojuholníkmi (ako na obrázku vpravo). Dokážte, že celú túto trojuholníkovú sieť vieme pokryť dlaždicami tak, aby čierne políčko ostalo ako jediné nepokryté. (Dlaždice môžeme aj otáčať, ale nie prekrývať a ani nemôžu vytŕčať mimo veľký trojuholník.)



Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou. Pre stručnosť budeme jednotkové trojuholníky volať *políčkami*. Taktiež pod pojmom trojuholník budeme vždy myslieť rovnostranný trojuholník.

Báza. Pre $n = 1$ trojuholník so stranou $2^1 = 2$ a jedným čiernym políčkom. Zvyšné tri políčka majú tvar dlaždice, takže ich vieme jednou dlaždicou pokryť.

Indukčný krok. Predpokladajme, že pre nejaké kladné celé číslo n vieme trojuholník so stranou 2^n s jedným čiernym rohovým políčkom pokryť dlaždicami (IP). Dokážeme tvrdenie pre trojuholník so stranou 2^{n+1}. Pomocou stredných priečok ho rozdelíme na štyri trojuholníky so stranou dĺžky 2^n. V rohu jedného z nich sa nachádza čierne políčko. Tento trojuholník vieme vydláždiť podľa indukčného predpokladu. Zvyšné tri trojuholníky majú spoločný roh v strede strany veľkého trojuholníka. Okolo tohto spoločného rohu zafarbíme políčka načierno, z každého trojuholníka jedno. Teraz na každý z troch trojuholníkov vieme použiť indukčný predpoklad, vďaka ktorému ich vieme vydláždiť okrem čiernych políčok. Na záver tieto tri nové čierne políčka zakryjeme dlaždicou. Tak sme celý trojuholník so stranou 2^{n+1} pokryli dlaždicami tak, aby ostalo len jedno rohové políčko.



Bonus

Všeobecnejšie tvrdenie neplatí. Pokiaľ v trojuholníku so stranou dĺžky 2 je čierne prostredné políčko, tak ho nevieme pokryť – ostávajúce 3 biele políčka netvoria dlaždicu.