2. sada domácich úloh

Termín odovzdania: **piatok 3. 1. 2025, 23:59**

Pravidlá pre domáce úlohy nájdete na `http://www.dcs.fmph.uniba.sk/~rajnik/udds/ulohy.html`.

V úlohe možno získať celkovo až 7 bodov. Dva body navyše sú brané ako bonus (najmä z úlohy 1).

Úloha 1

Úloha 1. Nech $\mathrm{Bij}(\mathbb{N})$ označuje množinu všetkých bijekcií z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$. Na množine všetkých zobrazení z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ (teda na $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$) definujeme reláciu R tak, že pre každé f, $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ platí

$$fRg \Leftrightarrow (\exists h \in \mathrm{Bij}(\mathbb{N}))(f = h \circ g).$$

a) *(1 b)* Dokážte, že R je reláciou ekvivalencie na $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

b) *(0,3 b)* Uveďte jednu triedu rozkladu množiny $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, ktorý je indukovaný reláciou ekvivalencie R. Rozhodnite, či je táto trieda spočítateľná.

c) *(1 b)* Nech $\mathcal{S}_R$ označuje rozklad množiny $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ indukovaný reláciou ekvivalencie R. Rozhodnite, či má $\mathcal{S}_R$ spočítateľne veľa tried.

d) *(0,7 b)* Nájdite všetky kardinálne čísla, ktoré môžu byť mohutnosťou niektorej triedy rozkladu $\mathcal{S}_R$.

a) Dôkaz relácie ekvivalencie

Reflexívnosť. Relácia R je reflexívna, lebo pre každé $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ platí $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}} \circ f$ a identita je bijekcia.

Symetrickosť. Relácia R je symetrická, lebo pre každé $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ platí

$$fRg \Rightarrow \exists h \in \mathrm{Bij}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})\colon f = h \circ g \Rightarrow f = h \circ g \Rightarrow g = h^{-1} \circ f \Rightarrow gRf,$$

keďže k bijekcii h existuje inverzné zobrazenie h^-1, ktoré je tiež bijekcia.

Tranzitívnosť. Relácia R je tranzitívna, lebo pre každé $f, g, h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ platí

$$\begin{gathered} fRg \wedge gRh \\ \Downarrow \\ f = k \circ g \wedge g = \ell \circ h, \text{ pre nejaké } k, \ell \in \mathrm{Bij}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) \\ \Downarrow \\ f = k \circ (\ell \circ h) = (k \circ \ell) \circ h \\ \Downarrow \\ fRh, \end{gathered}$$

keďže zloženie dvoch bijekcií je tiež bijekcia.

Týmto sme ukázali, že R je reláciou ekvivalencie na $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

b), d) Mohutnosti tried

Tieto podúlohy vyriešime naraz. Najprv uvedieme, aké možné mohutnosti môžu mať jednotlivé triedy rozkladu.

Trieda konštánt. Uvažujme triedu $R[f_0]$, kde $f_0(x) = 0$ pre všetky $x \in \mathbb{N}$. Táto trieda obsahuje také zobrazenia g, pre ktoré platí

$$gRf_0 \Leftrightarrow \exists h \in \mathrm{Bij}(\mathbb{N})\colon g = h \circ f_0 \Leftrightarrow \exists h \in \mathrm{Bij}(\mathbb{N})\colon \forall x \in \mathbb{N}\colon g(x) = h(x(f_0)) = h(0).$$

Teda trieda $R[f_0]$ práve všetky zobrazenia s predpisom $g(x) = h(0)$ pre nejakú bijekciu h. Toto sú zjavne všetky konštantné zobrazenia. Množina všetkých konštantných zobrazení je spočítateľná: prirodzenému číslu n priradíme konštantné zobrazenie $f(x) = n$, čo je zjavne bijekcia. Presnejšie, $|[f_0]| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Trieda bijekcií. Uvažujme triedu $R[\mathrm{id}_\mathbb{N}]$. Tá obsahuje všetky zobrazenia g, pre ktoré platí

$$gR\,\mathrm{id}_\mathbb{N} \Leftrightarrow \exists h\,\mathrm{Bij}(\mathbb{N})\colon g = h \circ \mathrm{id}_\mathbb{N} \Leftrightarrow \mathrm{Bij}(\mathbb{N})\colon g = h,$$

teda $R[\mathrm{id}_\mathbb{N}] = \mathrm{Bij}(\mathbb{N})$. Ukážeme, že ide o nespočítateľnú množinu. Každej nekonečnej binárnej postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ priradíme zobrazenie $f\colon \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ s predpisom

$$f(2n) = \begin{cases} 2n, & \text{ak } a_n = 0, \\ 2n+1, & \text{ak } a_n = 1, \end{cases} \qquad f(2n+1) = \begin{cases} 2n+1, & \text{ak } a_n = 0, \\ 2n, & \text{ak } a_n = 1. \end{cases}$$

Zobrazenie f je zjavne bijekcia. Pokiaľ sa dve binárne postupnosti líšia na indexe n, tak im priradené zobrazenia majú vymenené prvky $2n$ a $2n+1$. Našli sme tak injekciu $B \Rightarrow \mathrm{Bij}(\mathbb{N})$, kde B je množina nekonečných binárnych postupností. Preto $|\mathrm{Bij}(\mathbb{N})| \geq |B| = c$, a teda trieda $R[\mathrm{id}_\mathbb{N}] = \mathrm{Bij}(\mathbb{N})$ je nespočítateľná. Ešte ukážeme, že mohutnosť tejto triedy je presne c:

$$|R[\mathrm{id}_\mathbb{N}]| = |\mathrm{Bij}(\mathbb{N})| \overset{(1)}{\leq} |\mathbb{N}^\mathbb{N}| = \aleph_0^{\aleph_0} \overset{(2)}{\leq} 2^{\aleph_0} = c.$$

Nerovnosť (1) platí, lebo $\mathrm{Bij}(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Nerovnosť (2) vyplýva z toho, že $2 \leq \aleph_0$ [Škoviera, Tvrdenie 2.18 (k)]. Keďže $|\mathrm{Bij}(\mathbb{N})| \geq c$ a $|\mathrm{Bij}(\mathbb{N})| \leq c$, tak z Cantorovej-Bernsteinovej vety máme $|\mathrm{Bij}(\mathbb{N})| = c$.

Pre vyriešenie úlohy b) stačil jeden z týchto príkladov. Pre úlohu d) sú relevantné oba – tým sme ukázali, že triedy rozkladu môžu mať mohutnosti $\aleph_0$ a c. Riešenie dokončíme tým, že ukážeme, že žiadne iné kardinálne čísla nie sú mohutnosťou nejakej triedy.

Na začiatok zdôvodníme, že každá trieda je nekonečná. Uvažujme triedu ľubovoľného zobrazenia f. Nech h je bijeckia, ktorá vymieňa číslo $f(0)$ s prvkom n pre nejaké $n \in \mathbb{N}$. Potom $(h \circ f)(0) = h(f(0)) = n$. Takto sme našli pre každé $n \in \mathbb{N}$ iné zobrazenie, ktoré je v triede s f, preto $|R[f]| \geq \aleph_0$.

Neporiadne dokončenie Keďže $|\mathbb{N}^\mathbb{N}| \leq c$ a každá trieda je podmnožinou $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, tak jej mohutnosť je najviac c. Pre mohutnosť každej triedy rozkladu tak platí $\aleph_0 \leq |R[f]| \leq c$. Pokiaľ predpokladáme, že neexistuje kardinálne číslo medzi $\aleph_0$ a c, tak nám ostali len kardinálne čísla $\aleph_0$ a c, ku ktorým sme už uviedli príklady tried.

Poriadne dokončenie. Ešte naznačíme, ako sa to dalo dokončiť poriadne, bez využitia predpokladu, že medzi $\aleph_0$ a c nie sú iné kardinálne čísla. Pri tom nám pomôže uvedomiť si, ako tieto triedy vlastne vyzerajú, resp. čo robí bijekcia h. V zložení $h \circ g$ najprv zobrazíme každé prirodzené číslo na nejaké prirodzené číslo. A potom výsledné hodnoty zobrazenia g bijektívne zmeníme na iné hodnoty. Napr. ak $g(0) = g(1) = 4$ a $g(n) = 7$ pre všetky $n \geq 2$, tak všetky zobrazenia $h \circ g$ vyzerajú tak, že 0 a 1 zobrazujú na nejaké prirodzené číslo a všetky ostatné prirodzené čísla na nejaké iné prirodzené číslo. Každé zobrazenie $h \circ g$ je teda jednoznačne určené tým, kam h zobrazí 0 a 1, teda dvojicou prirodzených čísel. Táto trieda je spočítateľná. Vo všeobecnosti, pokiaľ je obor hodnôt $H(g)$ zobrazenia g konečný, tak zobrazenie $h \circ g$ je jednoznačne určené tým, kam bijekcia h zobrazuje prvky z $H(g)$. Preto takéto triedy $R[g]$ majú mohutnosť $\aleph_0$.

Ak je $H(g)$ nekonečný, tak už dostaneme c možných zobrazení z $H(g)$ do $\mathbb{N}$ (treba si ešte dať pozor na to, aby sa toto zobrazenie dalo doplniť na bijekciu z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$), teda v týchto prípadoch je $|R[g]| = c$.

c) Spočítateľnosť rozkladu

Ukážeme, že rozklad obsahuje nespočítateľne veľa tried. Nech A je množina nekonečných binárnych postupností (resp. zobrazení $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$), ktoré začínajú nulou (resp. $f(0) = 0$). Platí $|A| = c$, nakoľko odstránenie nuly zo začiatku je bijekcia do nekonečných binárnych postupností. Ukážeme, že každé zobrazenie z A má vlastnú triedu, teda že pre všetky $f, g \in A$ platí

$$R[f] = R[g] \Rightarrow f = g.$$

Tvrdenie dokážeme sporom. Nech $R[f] = R[g]$ a $f \neq g$. Keďže $f \neq g$, tak $f(n) \neq g(n)$ pre nejaké $n \in \mathbb{N}$. Bez ujmy na všeobecnosti nech $f(n) = 1$ a $g(n) = 0$. Z $R[f] = R[g]$ dostávame, že fRg, teda $f = h \circ g$ pre nejakú bijekciu h. Obe strany vyhodnotíme v bode 0:

$$0 = f(0) = h(g(0)) = h(0),$$

teda $h(0) = 0$. Teraz vyhodnotíme v n:

$$1 = f(n) = h(g(n)) = h(0) = 0.$$

Dostali sme $1 = 0$, čo je spor. Preto tried je aspoň toľko, koľko je postupností v A. Tých je však nespočítateľne veľa, preto rozklad obsahuje nespočítateľne veľa tried.

Úloha 2

(2 body) Na intervale $(1; \infty)$ definujeme relácie:

a) $\sqsubseteq$ takú, že $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x < 5y$ pre všetky $x, y \in (1; \infty)$;

b) $\preceq$ takú, že $x \preceq y \Leftrightarrow (5x < y \vee x = y)$ pre všetky $x, y \in (1; \infty)$.

Pre každú z týchto relácií rozhodnite, či ide o reláciu usporiadania na $(1; \infty)$. Ak áno, tak určte všetky jej minimálne, najmenšie, maximálne a najväčšie prvky. Všetky tvrdenia dokážte.

a) nie je usporiadanie

Relácia $\sqsubseteq$ nie je antisymetrická, lebo pre $x = 2$ a $y = 5$ platí $2 \sqsubseteq 5 \Leftrightarrow 2 < 25$ a $5 \sqsubseteq 2 \Leftrightarrow 5 < 10$, ale $2 \neq 5$.

Relácia $\sqsubseteq$ nie je tranzitívna, lebo $30 \sqsubseteq 7 \Leftrightarrow 30 < 35$ a $7 \sqsubseteq 5 \Leftrightarrow 7 < 25$, ale neplatí $30 \sqsubseteq 5 \Leftrightarrow 30 < 25$.

Preto relácia nie je usporiadaním. Pre dôkaz nám stačí uviesť porušenie len jednej vlastnosti. Relácia $\sqsubseteq$ je reflexívna, čiže táto vlastnsoť nám na dôkaz nepomôže.

b) je usporiadanie

Reflexívnosť Relácia $\preceq$, lebo pre každé $a \in (1; \infty)$ platí

$$a = a \Rightarrow 5a < a \vee a = a \Rightarrow a \preceq a.$$

Antisymetrickosť Relácia $\preceq$ je antisymetrická, lebo pre každé $a, b \in (1;\infty)$ platí

$$\begin{gathered} a \preceq b \wedge b \preceq a \\ \Downarrow \\ (5a < b \vee a = b) \wedge (5b < a \vee a = b) \\ \Downarrow \\ a = b \vee (5a < b \wedge 5b < a). \end{gathered}$$

Keďže a, b sú kladné, tak platí $a < 5a$, $b < 5b$. Preto ak platí $5a < b \wedge 5b < a$, tak platí

$$a < 5a < b < 5b < a,$$

teda $a < a$, čo je spor. Preto je výroková forma $5a < b \wedge 5b < a$ vždy nepravdivá, teda musí platiť $a = b$.

Tranzitívnosť Relácia $\preceq$ je tranzitívna. Dokážeme, že pre každé $a, b, c \in (1;\infty)$ platí

$$(a \preceq b \wedge b \preceq c) \Rightarrow a \preceq c.$$

Pre $a = b$ zjavne platí $(a \preceq a \wedge a \preceq c) \Rightarrow a \preceq c$ a takisto pre $b = c$ platí $(a \preceq b \wedge b \preceq b) \Rightarrow a \preceq b$. Preto vo zvyšku dôkazu budeme predpokladať, že $a \neq b \wedge b \neq c$:

$$\begin{gathered} a \preceq b \wedge b \preceq c \\ \Downarrow \\ (5a < b \vee a = b) \wedge (5b < c \vee b = c) \\ \Downarrow \;\; a \neq b, b \neq c \\ 5a < b \wedge 5b < c \\ \Downarrow \;\; b < 5b, \text{ lebo} 0 < b \\ 5a < c \\ \Downarrow \\ a \preceq c. \end{gathered}$$

Teda relácia $\preceq$ je usporiadaním na množine $(1;\infty)$. Pri určovaní význačných prvkov využijeme, že pre ostré usporiadanie $\prec$ vytvorené z usporiadania $\preceq$ platí $x \prec y \Leftrightarrow ((5x < y \vee x = y) \wedge x \neq y) \Leftrightarrow 5x < y)$.

Minimálne prvky sú všetky čísla z intervalu $(1;5\rangle$:

- Každé číslo $x \in (1;5\rangle$ je minimálny prvok. Pre spor predpokladajme, že existuje $a \neq x$, pre ktoré platí $a \prec x$, teda $5a < x$. Potom $a < x/5 \leq 5/5 = 1$, teda $a < 1$, čo je spor. Teda od čísla x nemôže existovať ostro menšie, preto je to minimálny prvok.
- Žiadne číslo $x > 5$ nie je minimálnym prvkom, lebo platí

  $$\frac{5+x}{10} \prec x \Leftrightarrow 5 \cdot \frac{5+x}{10} < x \Leftrightarrow 5 + x < 2x \Leftrightarrow 5 < x$$

  a taktiež $(5+x)/10 > (5+5)/10 > 1$, teda ide o číslo z intervalu $(1;\infty)$. Tento bod vieme však zdôvodniť aj tak, že si zvolíme ľubovoľné reálne číslo $a \in (1, x/5)$ – keďže $x > 5$, tak $x/5 > 1$ a medzi ľubovoľnými dvoma reálnymi číslami existuje iné reálne číslo. Pre takto zvolené a platí $5a < x$, teda $a \prec x$.

Najmenší prvok neexistuje, keďže existuje viac minimálnych prvkov (napr. 2 a 3).

Maximálny prvok neexistuje, nakoľko pre každé $x \in (1;\infty)$ platí $x \preceq 6x \Leftrightarrow 5x < 6x \Leftrightarrow 5 < 6$.

Najväčší prvok neexistuje, nakoľko neexistuje maximálny prvok.

(2 body) O nasledovných množinách rozhodnite a dokážte, či sú spočítateľné:

a) Množina A, ktorá obsahuje všetky postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ prirodzených čísel také, že pre všetky celé $n \geq 0$ platí $a_{2n+1} \geq a_{2n}$ a zároveň $a_{2n+2} \leq a_{2n+1}$.

b) Množina B, ktorá obsahuje všetky postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ prirodzených čísel také, že $a_0 = 0$ a pre všetky celé $n \geq 2$ sa člen a_n nachádza v uzavretom intervale, ktorého krajné body sú a_{n-1} a a_{n-2} (teda $a_2 \in \langle a_0, a_1 \rangle$, $a_3 \in \langle a_2, a_1 \rangle$, $a_4 \in \langle a_2, a_3 \rangle$, $\ldots$).

Podúloha a)

Množina A je nespočítateľná. Ukážeme to diagonalizáciou. Čiže pre spor, nech A je spočítateľná, takže každej postupnosti z A vieme priradiť jednoznačné prirodzené číslo. To znamená, že máme bijekciu z $\mathbb{N}$ do A takú, že číslo 0 sa zobrazí do postupnosti a_0 s prvkami $a_{0,0}, a_{0,1}, a_{0,2}, \ldots$, číslo 1 sa zobrazí do postupnosti a_1 s prvkami $a_{1,0}, a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots$ a tak ďalej. Chceli by sme vytvoriť takú postupnosť p, ktorá sa medzi nimi nenachádza.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \leftrightarrow & a_{0,0} & \leq & a_{0,1} & \geq & a_{0,2} & \leq & a_{0,3} & \geq \cdots \\
1 & \leftrightarrow & a_{1,0} & \leq & a_{1,1} & \geq & a_{1,2} & \leq & a_{1,3} & \geq \cdots \\
2 & \leftrightarrow & a_{2,0} & \leq & a_{2,1} & \geq & a_{2,2} & \leq & a_{2,3} & \geq \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\hline\hline
x & \leftrightarrow & p_0 & \leq & p_1 & \geq & p_2 & \leq & p_3 & \geq \cdots
\end{array}$$

Ak to však budeme robiť úplne bezhlavo, napríklad $p_i = a_{i,i} + 1$, výsledná postupnosť nemusí spĺňať podmienky nerovnosti, a teda ani patriť A. Aby sme však mohli povedať, že diagonalizáciou sme dosiahli spor, musíme nájsť postupnosť, ktorá **patrí do množiny** A a nepriradili sme jej žiadne číslo.

Ako nápad, ako braním „diagonálnych“ prvkov do postupnosti nepokaziť nerovnosti, nám môže prísť, že budeme brať každý druhý index v postupnosti p. Formálne, pre všetky i určíme $p_{2i+1} = a_{i,2i+1} + 1$. Tým určite dosiahneme, že naša postupnosť sa bude aspoň v jednom prvku líšiť od ľubovoľnej z očíslovaných postupností.

Ešte však nevieme, čo sa nachádza na prvkoch s párnymi indexami. Mohli by sme sa napríklad pozrieť na susedné prvky a dať tam menší z nich. Tým by sme zrejme splnili podmienky nerovností. Ak sa nám s tým však nechce babrať, môžeme na párne indexy dať aj samé nuly, lebo tie sú menšie alebo rovné ako čokoľvek iné.

Dostali sme tak postupnosť p, ktorá patrí do množiny A, no nemá priradené žiadne prirodzené číslo – totiž od postupnosti a_i sa líši na indexe $2i + 1$: $p_{2i+1} = a_{i,2i+1} + 1 \neq a_{i,2i+1}$. Tým sme došli k sporu, a teda A je nespočítateľná.

Výsledný spor možno nájsť aj takto. Keďže je postupnosť p v množine A, tak má nejaké číslo. Nech teda $p = a_i$. Pre jej člen na indexe $2i+1$ tak platí $p_{2i+1} = a_{i,2i+1}$. Avšak $p_{2i+1} = a_{i,2i+1}+1$, teda $a_{i,2i+1}+1 = a_{i,2i+1}$, čiže $0 = 1$, čo je spor.

Iné riešenie. Nech P je množina nekonečných binárnych postupností. Chceme ukázať, že z P existuje injekcia do A, čiže $|A| \geq |P| > |\mathbb{N}|$. Takouto injekciou môže byť napríklad $f((a_0, a_1, a_2, \ldots)) = (a_0, 1, a_1, 1, a_2, 1, \ldots)$. Funkcia f je injekciou, lebo keď si vezmeme dva možné obrazy, ktoré sa rovnajú, čiže $(a_0, 1, a_1, 1, a_2, 1, \ldots) = (b_0, 1, b_1, 1, b_2, 1, \ldots)$, tak $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots$, a teda aj postupnosti, ktoré boli vzormi týchto obrazov, sa museli rovnať.

Podúloha b)

Množina B však už spočítateľná je. Všimnime si, že po každom prvku sa nám hodnota $|a_{i+1} - a_i|$ nezmení alebo zmenší. Navyše, keďže je to prirodzené číslo, nemôže klesať donekonečna, preto od nejakého momentu bude platiť $|a_{i+1} - a_i| = k$ pre nejaké konštantné k, a teda táto postupnosť bude oscilovať medzi dvoma členmi.

V tejto úlohe máme teda dva stupne „nekonečnej“ voľnosti. Prvou je to, ako si zvolíme člen a_1, druhou je to, po koľkých členoch sa nám postupnosť zacyklí. Môžeme teda rozdeliť postupnosti v B podľa týchto dvoch informácií, čiže $B_{a_1,n}$ budú postupnosti, ktorých prvý člen je a_1 a zacyklia sa po n prvkoch. Uvedomme si, že mohutnosť každej z množín $B_{a_1,n}$ je konečná, pretože na prvých n miestach máme nanajvýš $(a_1 + 1)^n$ možností[1], ako postupnosť môže vyzerať a potom už všetky členy sú jednoznačne určené.

No a nakoniec už použijeme podobnú myšlienku ako pri dvojiciach prirodzených čísel. Tieto množiny postupností si dáme do tabuľky. Teraz vieme robiť to, že pôjdeme po diagonálach, čiže najskôr vymenujeme

$B_{0,0}$	$B_{0,1}$	$B_{0,2}$	$\cdots$
$B_{1,0}$	$B_{1,1}$	$B_{1,2}$	$\cdots$
$B_{2,0}$	$B_{2,1}$	$B_{2,2}$	$\cdots$
$B_{3,0}$	$B_{3,1}$	$B_{3,2}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

všetky prvky množiny $B_{0,0}$, potom všetky prvky množiny $B_{1,0}$, $B_{0,1}$, $B_{2,0}$, $B_{1,1}$, $B_{0,2}$, $B_{3,0}$, atď. Tento proces nikde nebude mať problém s tým, že by neprešiel na ďalšie políčko, lebo všetky množiny sú konečné, tým pádom sa ku všetkým množinám dostaneme. V takomto poradí budeme priraďovať prvkom čísla $0, 1, 2, \dots$, čím sme našli bijekciu medzi $B, \mathbb{N}$, a teda B je spočítateľná.

Poznámka. Predošlý odsek by sa dal stručnejšie odargumentovať tak, že máme $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ (čiže spočítateľný počet) konečných množín, a teda aj ich zjednotenie bude spočítateľné.

[1] Tento odhad je oveľa väčší, ako tých postupností v skutočnosti je, to nám ale nevadí, my sme chceli len ukázať, že ich je konečne veľa.