

2. sada domácich úloh

Termín odovzdania: **nedeľa 21. 12. 2025, 23:59**

Úloha 1. (2 body) Nech R je relácia na množine $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ taká, že pre každé $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ platí

$$ARB \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: ((\forall a \in A: \exists b \in B: b = a + k) \wedge (\forall b \in B: \exists a \in A: b = a + k)).$$

Dokážte, že R je reláciou ekvivalencie na množine $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ a opíšte rozklad, ktorý indukuje.

Poznámka. Pokiaľ je úloha pre Vás veľmi abstraktná, 1 bod viete získať, ak ju vyriešite pre prípad, keď reláciu R budete miesto množiny $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ uvažovať definovanú na množine $\mathcal{P}(\{0, 1, 2, 3, 4\})$. Uznáme Vám aj riešenia založené na overovaní všetkých možností, ak ho dostatočne zaznamenáte. Ak pritom použijete počítačové programy, tak ich pripojte k odovzdávanému PDF súboru do MS Teams.

Úloha 2. (2 body) Na množine $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ definujeme reláciu $\sqsubseteq$ tak, že pre ľubovoľné $a, b \in \mathbb{N}$ platí

$$a \sqsubseteq b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}: b^2 - a^2 = 9k.$$

Dokážte, že $\sqsubseteq$ je reláciou usporiadania na množine $\mathbb{N}$ a určte všetky jej minimálne, najmenšie, maximálne a najväčšie prvky. Správnosť vašich výsledkov dokážte.

Úloha 3. (1,5 boda) Nech M je množina všetkých nekonečných binárnych postupností (teda každý člen je 0 alebo 1), ktoré neobsahujú tri jednotky vedľa seba a zároveň neobsahujú dve nuly vedľa seba. Rozhodnite a následne dokážte, či je množina M spočítateľná.

Úloha 4. (BONUS, 2 body) Zobrazenie $f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ nazveme *vzájomne disjunktné* pokiaľ pre ľubovoľné dve rôzne množiny $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ platí $f(A) \cap f(B) = \emptyset$. Určte mohutnosť množiny všetkých vzájomne disjunktných zobrazení $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$.