2. sada domácich úloh

Termín odovzdania: **piatok 3. 1. 2025, 23:59**

Pravidlá pre domáce úlohy nájdete na `http://www.dcs.fmph.uniba.sk/~rajnik/udds/ulohy.html`.

V úlohe možno získať celkovo až 7 bodov. Dva body navyše sú brané ako bonus (najmä z úlohy 1).

Úloha 1. Nech $\mathrm{Bij}(\mathbb{N})$ označuje množinu všetkých bijekcií z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$. Na množine všetkých zobrazení z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ (teda na $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$) definujeme reláciu R tak, že pre každé f, $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ platí

$$f R g \Leftrightarrow (\exists h \in \mathrm{Bij}(\mathbb{N}))(f = h \circ g).$$

a) *(1 b)* Dokážte, že R je reláciou ekvivalencie na $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

b) *(0,3 b)* Uveďte jednu triedu rozkladu množiny $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, ktorý je indukovaný reláciou ekvivalencie R. Rozhodnite, či je táto trieda spočítateľná.

c) *(1 b)* Nech $\mathcal{S}_R$ označuje rozklad množiny $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ indukovaný reláciou ekvivalencie R. Rozhodnite, či má $\mathcal{S}_R$ spočítateľne veľa tried.

d) *(0,7 b)* Nájdite všetky kardinálne čísla, ktoré môžu byť mohutnosťou niektorej triedy rozkladu $\mathcal{S}_R$.

Úloha 2. *(2 body)* Na intervale $(1; \infty)$ definujeme relácie:

a) $\sqsubseteq$ takú, že $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x < 5y$ pre všetky $x, y \in (1; \infty)$;

b) $\preceq$ takú, že $x \preceq y \Leftrightarrow (5x < y \vee x = y)$ pre všetky $x, y \in (1; \infty)$.

Pre každú z týchto relácií rozhodnite, či ide o reláciu usporiadania na $(1; \infty)$. Ak áno, tak určte všetky jej minimálne, najmenšie, maximálne a najväčšie prvky. Všetky tvrdenia dokážte.

Úloha 3. *(2 body)* O nasledovných množinách rozhodnite a dokážte, či sú spočítateľné:

a) Množina A, ktorá obsahuje všetky postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ prirodzených čísel také, že pre všetky celé $n \geq 0$ platí $a_{2n+1} \geq a_{2n}$ a zároveň $a_{2n+2} \leq a_{2n+1}$.

b) Množina B, ktorá obsahuje všetky postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ prirodzených čísel také, že $a_0 = 0$ a pre všetky celé $n \geq 2$ sa člen a_n nachádza v uzavretom intervale, ktorého krajné body sú a_{n-1} a a_{n-2} (teda $a_2 \in \langle a_0, a_1 \rangle$, $a_3 \in \langle a_2, a_1 \rangle$, $a_4 \in \langle a_2, a_3 \rangle$, $\dots$).