

# Cvičenie 9: usporiadania

**Úloha 1.** Pri každú z nasledovných relácií určte, či je reflexívna, antisymetrická, tranzitívna, dichotomická. Určte, či sú usporiadaním, resp. úplným usporiadaním. Ak áno, určte ich minimálne, maximálne, najmenšie a najväčšie prvky.

- a)  $\emptyset$  (na množine  $M$ )
- b)  $M \times M$  (na množine  $M$ )
- c) Relácia  $|$  na  $\mathbb{Z}$ , kde  $a | b \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(ka = b)$  pre všetky  $a, b \in \mathbb{Z}$
- d) Relácia  $|$  na  $\mathbb{N} - \{1\}$ , kde  $a | b \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(ka = b)$  pre všetky  $a, b \in \mathbb{N}$
- e)  $S_1 = \{((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2; a + b \leq c + d\}$
- f)  $S_2 = \{((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2; a + b < c + d\}$
- g)  $S_3 = \{((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2; a + b < c + d \vee (a, b) = (c, d)\}$
- h)  $R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; 7a | b \vee a = b\}$
- i)  $R = \{(A, B) \in \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M); A \subseteq B\}$
- j)  $\preceq = \{((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2; (\exists k \in \mathbb{N})(c = ka \wedge d = kb)\}$  [Riešenie]

**Úloha 2.** Nájdite príklad uporiadání  $R$  a  $S$  na rovnakej množine  $M$ , aby relácie

- a)  $R \cap S$ ,
- b)  $R \cup S$ ,
- c)  $R - S$ ,
- d)  $RS$ ,
- e)  $R^{-1}$ ?

boli / neboli usporiadania. V prípade, že taká voľba  $R, S$  neexistuje, dokážte to.

**Úloha 3.** Nech  $A, I \neq \emptyset$  sú množiny a nech pre každé  $i \in I$  je  $\varphi_i$  usporiadanie množiny  $A$ . Dokážte, že potom aj  $\bigcap_{i \in I} \varphi_i$  je usporiadanie množiny  $A$ . Čo ak sú  $\varphi_i$  úplné usporiadania?

Poznámka.  $\bigcap_{i \in I} \varphi_i = \{x; (\forall i \in I)(x \in \varphi_i)\}$

**Úloha 4.** Nech  $\varphi, \tau$  sú dva rozklady na množine  $X \neq \emptyset$ . Hovoríme, že  $\varphi \leq \tau$  (alebo, že rozklad  $\varphi$  je menší alebo rovný ako  $\tau$ ), ak ku každej množine  $M \in \varphi$  existuje taká množina  $P \in \tau$ , že  $M \subseteq P$ . Dokážte, že  $\leq$  je usporiadanie systému všetkých rozkladov množiny  $M$ .

**Úloha 5.** Pre zadané nezáporné celé čísla  $m, n$  nájdite usporiadanú množinu, ktorá bude mať  $n$  maximálnych a  $m$  minimálnych prvkov.

**Úloha 6.** Možno na množine  $\mathbb{N}^2$  definovať úplné usporiadanie?

**Úloha 7.** Nech  $M$  je množina takých podmnožín množiny  $\{1, 2, \dots, 20\}$ , ktoré obsahujú len po dvoch nesúdeliteľné čísla, teda

$$M = \{X \in \mathcal{P}(\{1, 2, \dots, 20\}); (\forall a, b \in X)(a \neq b \Rightarrow \text{NSD}(a, b) = 1)\}.$$

Dokážte, že  $\subseteq$  je usporiadaním na množine  $M$ . Nech  $A, B$  sú dva maximálne prvky. Musí nutne platiť, že  $|A| = |B|$ , teda, že  $A$  a  $B$  majú rovnaký počet prvkov?

**Úloha 8.** Pre neprázdnu množinu  $A \subseteq \mathbb{N}$  označuje  $\max A$  najväčší prvok množiny  $A$  (vzhľadom na klasické usporiadanie  $\leq$ ). Nech  $M = \{n \in \mathbb{N}; 0 \leq n \leq 47\}$  a nech

$$R = \{(A, B) \in (\mathcal{P}(M) - \{\emptyset\}) \times (\mathcal{P}(M) - \{\emptyset\}); \max A < \max B \vee A = B\}.$$

Dokážte, že  $R$  je usporiadaním na množine  $\mathcal{P}(M) - \{\emptyset\}$  a nájdite všetky jej minimálne, najmenšie, maximálne a najväčšie prvky. Správnosť vašich nájdených prvkov dokážte.